Capítulo

8

Cinemática vetorial

A velocidade e a aceleração caracterizam-se como grandezas vetoriais, tendo módulo, direção e sentido. Assim, numa trajetória curvilínea, pelo menos a direção da velocidade está em constante mudança. A aceleração relacionada com a variação da direção da velocidade é a aceleração centrípeta.

8.1 Velocidade e aceleração vetoriais

Velocidade e aceleração são caracterizadas como grandezas vetoriais.

8.2 Casos particulares

As características da velocidade e da aceleração vetoriais são detalhadas em casos particulares.

8.3 Composição de movimentos

Estudo do movimento de um corpo como resultado de vários movimentos simultâneos.

A megarrampa

Como serão, em cada instante, a velocidade e a aceleração vetoriais do desportista ao percorrer a pista? Vamos observar alguns detalhes da megarrampa e pensar um pouco sobre isso.

1 A uma altura de 27 m, o atleta se prepara para descer a megarrampa. Em menos de 3 s, ele poderá atingir uma **velocidade de 80 km/h**.

2 Com a velocidade adquirida na primeira rampa, *skate* e atleta são lançados por um plano inclinado e voam, em trajetória parabólica, sobre um vão de **20 m de comprimento**.

3 Ao subir o *quarterpipe*, o esqueitista muda bruscamente a direção de seu movimento. Com isso, ele fica sob a ação de uma aceleração cujo módulo é equivalente a 7 vezes a aceleração da gravidade (7g).

4 Mesmo sob a ação da gravidade, o atleta pode alcançar **21 m de altura** em relação ao solo.

Megaproteção

Equipamentos de segurança tradicionais, como **capacete**, **joelheira** e **cotoveleira,** são feitos hoje de material termoplástico leve e de elevada resistência a impactos. Além disso, os esqueitistas da megarrampa usam alguns equipamentos extras de proteção.

Roupa de neoprene para evitar queimaduras causadas pelo atrito com a pista, em caso de queda.

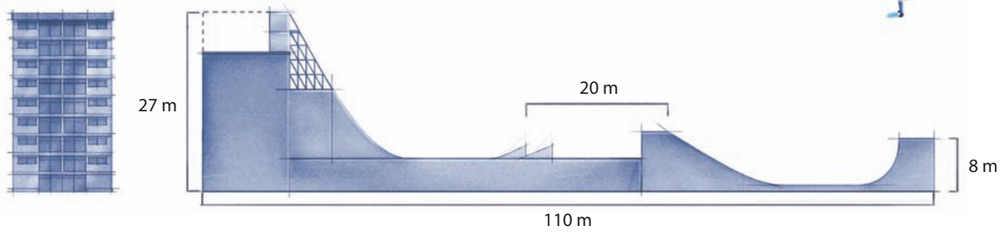
Colete protetor para coluna e cóccix, feito de polietileno de alta densidade.

Para pensar

1. Qual é o módulo da aceleração média do atleta 3 s após o início de seu movimento?
2. Ao passar pelo ponto mais alto de sua trajetória parabólica, qual é o módulo da aceleração do esqueitista?
3. No instante em que o esqueitista alcança os 21 m de altura, em relação ao solo, qual é o módulo de sua velocidade?

Medidas

A megarrampa é tão comprida quanto um campo de futebol e tem altura equivalente a um prédio de 9 andares.



Seção 8.1

Velocidade e aceleração vetoriais

Objetivos

- Caracterizar vetor deslocamento.
- Definir a velocidade vetorial média e instantânea.
- Analisar a variação do módulo e da direção da velocidade vetorial nos diferentes movimentos.
- Definir aceleração vetorial média e instantânea.
- Conceituar aceleração centrípeta e tangencial.

Termos e conceitos

- **movimento variado**
- **aceleração tangencial**
- **aceleração centrípeta**
- **aceleração vetorial**

Nos capítulos anteriores tratamos a velocidade e a aceleração como grandezas escalares, e por essa razão elas foram chamadas de **velocidade escalar** e **aceleração escalar**.

Neste capítulo, a velocidade e a aceleração são caracterizadas como grandezas vetoriais. Estudaremos a **velocidade vetorial média** e a **instantânea**, bem como a **aceleração vetorial média** e a **instantânea**.

1 Vetor deslocamento

Um ponto material ocupa num instante t_1 a posição P_1 cujo espaço é s_1. No instante posterior t_2, o ponto material ocupa a posição P_2 de espaço s_2 (**fig. 1**). Entre essas posições, a variação do espaço é $\Delta s = s_2 - s_1$.

O vetor $\vec{d}$, representado pelo segmento orientado de origem P_1 e extremidade P_2, recebe o nome de **vetor deslocamento** do ponto material entre os instantes t_1 e t_2.

Na situação representada na **figura 1**, em que a trajetória é curvilínea, o módulo do vetor deslocamento é menor do que o módulo da variação do espaço ($|\vec{d}| < |\Delta s|$).

No caso em que a trajetória é retilínea (**fig. 2**), o módulo do vetor deslocamento é igual ao módulo da variação do espaço ($|\vec{d}| = |\Delta s|$).

Figura 1.

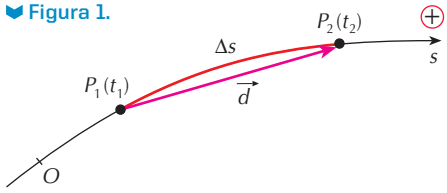
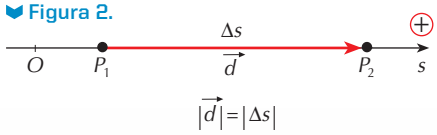


Figura 2.



2 Velocidade vetorial média

Vimos que a velocidade escalar média v_m é o quociente entre a variação do espaço Δs e o correspondente intervalo de tempo Δt:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A **velocidade vetorial média** $\vec{v}_m$ é o quociente entre o vetor deslocamento $\vec{d}$ e o correspondente intervalo de tempo Δt:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

Numa trajetória curvilínea, o módulo da variação do espaço é sempre maior que o módulo do vetor deslocamento.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A velocidade vetorial média $\vec{v}_m$ possui a mesma direção e o mesmo sentido do vetor deslocamento $\vec{d}$ (**fig. 3**).

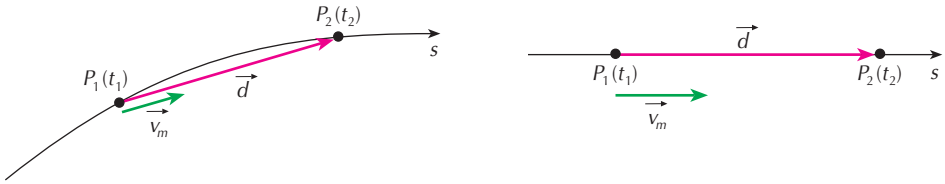


Figura 3. O vetor $\vec{v}_m$ tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor deslocamento $\vec{d}$.

Seu módulo é dado por:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$$

Em trajetórias curvilíneas, temos $|\vec{d}| < |\Delta s|$ e portanto $|\vec{v}_m| < |v_m|$. Para trajetórias retilíneas, resulta $|\vec{v}_m| = |v_m|$, pois $|\vec{d}| = |\Delta s|$.

Por exemplo, na **figura 4**, uma partícula percorre uma semicircunferência de raio R, em certo intervalo de tempo Δt, partindo do ponto P_1 e chegando ao ponto P_2. Nesse intervalo de tempo, a variação do espaço é $\Delta s = \pi R$ e o vetor deslocamento $\vec{d}$ tem módulo igual a $2R$ ($|\vec{d}| = 2R$). A velocidade escalar média v_m entre as posições P_1 e P_2 é $v_m = \frac{\pi R}{\Delta t}$ e o módulo da velocidade vetorial média é $|\vec{v}_m| = \frac{2R}{\Delta t}$.

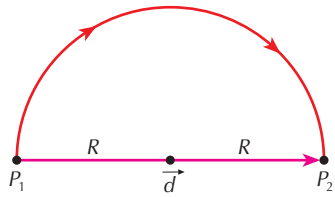


Figura 4.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

P. 149 Um carro percorre a quarta parte de uma pista horizontal e circular, de raio 100 m, em 10 s. Determine, nesse intervalo de tempo, os módulos:

a) da variação do espaço;

b) do vetor deslocamento;

c) da velocidade escalar média;

d) da velocidade vetorial média.

P. 150 No mapa da rede metroviária de São Paulo, destacamos a linha azul. A distância que o metrô percorre entre os terminais Jabaquara e Tucuruvi é de 20,2 km e a duração da viagem é de 44 min.

a) Qual é o módulo da velocidade escalar média do metrô entre os terminais Jabaquara e Tucuruvi?

b) Represente o vetor deslocamento entre as estações Jabaquara e Tucuruvi e calcule seu módulo.

c) Qual é o módulo da velocidade vetorial média entre os citados terminais?

Sabe-se que, na escala do mapa, cada 1 cm corresponde a 2 km.

3 Velocidade vetorial instantânea

Considere uma pequena esfera descrevendo uma certa trajetória em relação a um dado referencial (**fig. 5**). Num instante t, essa esfera ocupa a posição P.

A **velocidade vetorial** $\vec{v}$ da esfera, no instante t, tem as seguintes características:

- módulo: igual ao módulo da velocidade escalar no instante t ($|\vec{v}| = |v|$);
- direção: da reta tangente à trajetória pelo ponto P;
- sentido: do movimento.

Lembre-se de que um vetor varia quando qualquer um dos seus elementos varia (módulo, direção, sentido); logo, a velocidade vetorial varia quando um desses elementos varia. Desse modo, se um ponto material descreve uma curva (**fig. 6**), **sua velocidade vetorial já está variando**, pois, em cada ponto da curva, existe uma reta tangente; portanto, em cada ponto a velocidade vetorial possui uma direção. Assim, a velocidade vetorial varia num movimento curvilíneo independentemente do tipo do movimento (uniforme, uniformemente variado etc.). Em resumo:

Figura 5.

Trajetória curva ⇔ Variação da **direção** da velocidade vetorial

Nos movimentos uniformes, a velocidade vetorial tem módulo constante, pois a velocidade escalar é constante.

Nos movimentos variados, o módulo da velocidade vetorial varia.

Movimento variado ⇔ Variação do **módulo** da velocidade vetorial

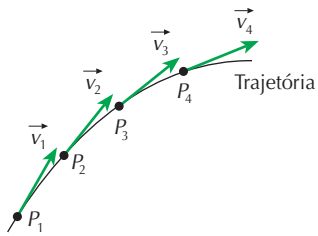


Figura 6. **Variação da direção da velocidade vetorial.**

4 Aceleração vetorial média

Quando estudamos os movimentos variados, definimos a aceleração escalar média (α_m) como sendo o quociente entre a variação da velocidade escalar ($\Delta v = v_2 - v_1$) pelo intervalo de tempo correspondente ($\Delta t = t_2 - t_1$).

De modo análogo, podemos definir a **aceleração vetorial média** $\vec{a}_m$. Seja $\vec{v}_1$ a velocidade vetorial de um ponto material num instante t_1 e $\vec{v}_2$ a velocidade vetorial no instante posterior t_2 (**fig. 7A**). A aceleração vetorial média $\vec{a}_m$ é dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A aceleração vetorial média $\vec{a}_m$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\Delta\vec{v}$ (**fig. 7B**).

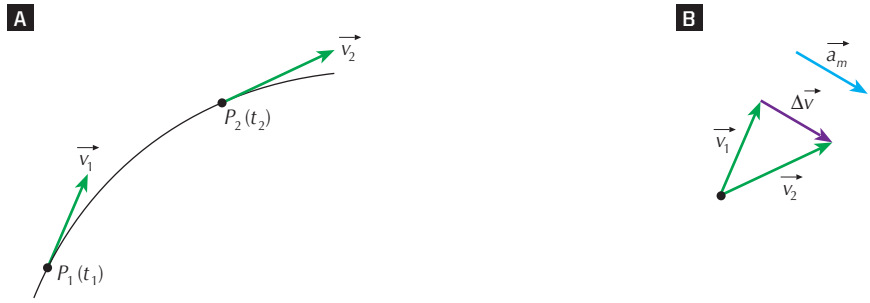


Figura 7.

Por exemplo, na **figura 8**, uma partícula passa pelo ponto P_1, no instante t_1, com velocidade $\vec{v}_1$; e, no instante t_2, atinge o ponto P_2 com velocidade $\vec{v}_2$, tal que $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Observe que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são tangentes à trajetória nos pontos P_1 e P_2 e têm o sentido do movimento. Para o cálculo do módulo da aceleração vetorial média no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, devemos, inicialmente, calcular o módulo de $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (**fig. 9**).

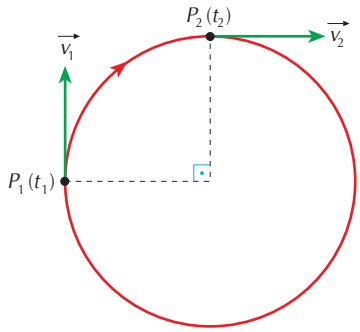


Figura 8.

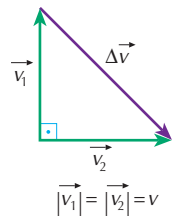


Figura 9.

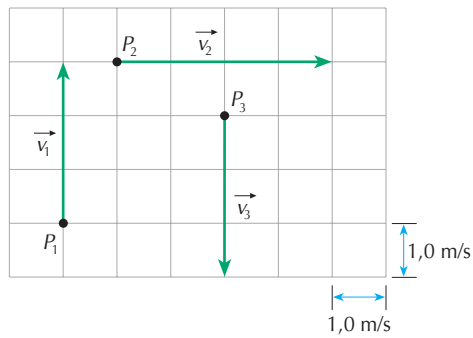
$$|\Delta\vec{v}|^2 = v^2 + v^2 \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = v \cdot \sqrt{2}$$

Portanto: $|\vec{a}_m| = \dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \dfrac{v\sqrt{2}}{\Delta t}$

EXERCÍCIO PROPOSTO

P. 151 As velocidades vetoriais $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ de uma partícula nos instantes $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ s e $t_3 = 5$ s, respectivamente, estão representadas na figura. Calcule o módulo da aceleração vetorial média nos intervalos de tempo:

a) de t_1 a t_2; **b)** de t_1 a t_3.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5 Aceleração vetorial instantânea

A **aceleração vetorial instantânea** $\vec{a}$ pode ser entendida como sendo uma aceleração vetorial média, quando o intervalo de tempo Δt é extremamente pequeno.

Sempre que houver variação da velocidade vetorial $\vec{v}$, haverá aceleração vetorial $\vec{a}$.

A velocidade vetorial $\vec{v}$ pode variar em módulo e em direção*. Por esse motivo a aceleração vetorial $\vec{a}$ é decomposta em duas acelerações componentes: **aceleração tangencial** ($\vec{a}_t$), que está relacionada com a variação do módulo de $\vec{v}$, e **aceleração centrípeta** ($\vec{a}_{cp}$), que está relacionada com a variação da direção de $\vec{v}$.

Aceleração tangencial

A aceleração tangencial $\vec{a}_t$ possui as seguintes características:

- módulo: igual ao módulo da aceleração escalar α ($|\vec{a}_t| = |\alpha|$);
- direção: tangente à trajetória;
- sentido: o mesmo de $\vec{v}$, se o movimento for acelerado, ou oposto ao de $\vec{v}$, se o movimento for retardado.

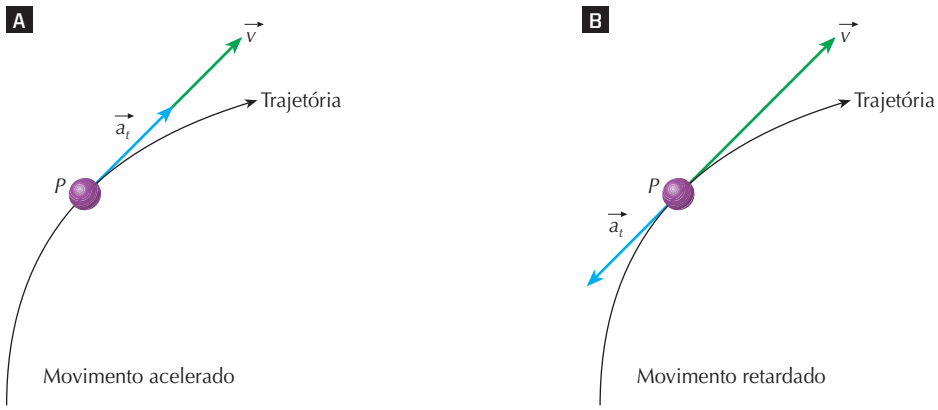


Figura 10. **A aceleração tangencial está relacionada com a variação do módulo da velocidade vetorial.**

Nos movimentos uniformes, o módulo da velocidade vetorial não varia e, portanto, a aceleração tangencial é nula. A aceleração tangencial existe somente em movimentos variados e independe do tipo de trajetória (retilínea ou curvilínea).

Aceleração centrípeta

A aceleração centrípeta $\vec{a}_{cp}$ possui as seguintes características:

- módulo: é dado pela expressão $|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$, na qual v é a velocidade escalar do móvel e R é o raio de curvatura da trajetória;
- direção: perpendicular à velocidade vetorial em cada ponto;
- sentido: orientado para o centro de curvatura da trajetória (**fig. 11**).

Nos movimentos retilíneos, a direção da velocidade vetorial não varia e a aceleração centrípeta é nula. A aceleração centrípeta existe somente em movimentos de trajetórias curvas e independe do tipo de movimento (uniforme ou variado). A aceleração centrípeta é também denominada **aceleração normal**.

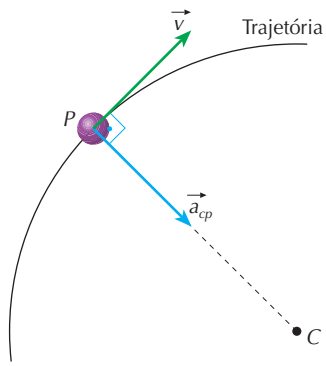


Figura 11. **A aceleração centrípeta $\vec{a}_{cp}$ está relacionada com a variação da direção de $\vec{v}$.**

* Eventualmente pode ocorrer variação de sentido do movimento, mas somente se também variar o módulo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Aceleração vetorial

A soma vetorial $\vec{a}_t + \vec{a}_{cp}$ define a aceleração vetorial $\vec{a}$ do movimento (**fig. 12**):

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_{cp}$$

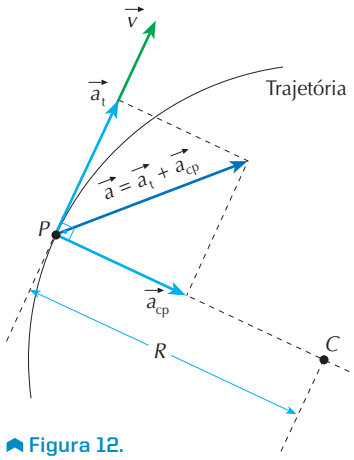


Figura 12.

Aceleração vetorial

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_{cp}$$

Em módulo: $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_{cp}|^2$

$\vec{a}$ está relacionada com a variação da velocidade vetorial $\vec{v}$

Aceleração tangencial	Aceleração centrípeta
$\vec{a}_t$	$\vec{a}_{cp}$
Está relacionada com a variação do módulo de $\vec{v}$; logo, existe somente em movimentos variados (nos movimentos uniformes, $\vec{a}_t = \vec{0}$).	Está relacionada com a variação da direção de $\vec{v}$; logo, existe somente em trajetórias curvas (nos movimentos retilíneos, $\vec{a}_{cp} = \vec{0}$).
$\lvert\vec{a}_t\rvert = \lvert\alpha\rvert$	$\lvert\vec{a}_{cp}\rvert = \frac{v^2}{R}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seção 8.2

Casos particulares

Objetivo

Analisar a velocidade vetorial e a aceleração vetorial em diferentes tipos de movimento.

Termos e conceitos

- movimento uniforme
- movimento uniformemente variado

1 MRU (movimento retilíneo e uniforme)

A velocidade vetorial é constante, isto é, tem módulo, direção e sentido constantes. Portanto, a aceleração vetorial é nula: a velocidade vetorial não varia em módulo, pois o movimento é uniforme (portanto, $\vec{a}_t = \vec{0}$), e não varia em direção, pois a trajetória é retilínea (portanto, $\vec{a}_{cp} = \vec{0}$).

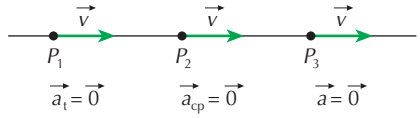


Figura 13.

2 MCU (movimento circular e uniforme)

A velocidade vetorial $\vec{v}$ tem módulo constante, pois o movimento é uniforme; logo, a aceleração tangencial $\vec{a}_t$ é nula. Por outro lado, a velocidade vetorial $\vec{v}$ varia em direção, pois a trajetória é curva. Consequentemente, a aceleração centrípeta não é nula; seu módulo $\left(|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R} \right)$ é constante, pois a velocidade escalar v e o raio R são constantes. A aceleração centrípeta, porém, varia em direção e sentido.

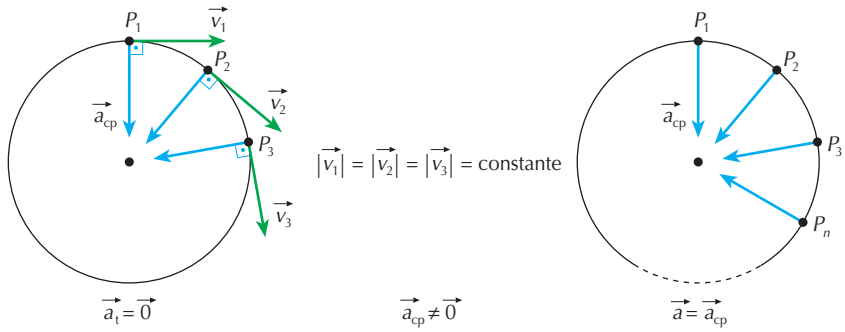


Figura 14.

O módulo da aceleração centrípeta de cada criança no gira-gira é diretamente proporcional ao quadrado de sua velocidade.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 MRUV (movimento retilíneo uniformemente variado)

A velocidade vetorial varia em módulo, pois o movimento é variado e portanto a aceleração tangencial $\vec{a}_t$ não é nula. A aceleração centrípeta $\vec{a}_{cp}$ é nula, pois a trajetória é retilínea. Como no MUV a aceleração escalar α é constante, decorre que a aceleração tangencial $\vec{a}_t$ tem módulo constante ($|\vec{a}_t| = |\alpha|$) e direção constante. Quanto ao sentido, $\vec{a}_t$ terá o mesmo sentido de $\vec{v}$, se o movimento for acelerado, ou oposto ao de $\vec{v}$, se retardado.

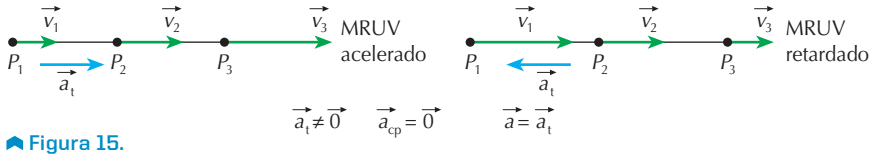


Figura 15.

4 MCUV (movimento circular uniformemente variado)

No movimento circular uniformemente variado, a aceleração tangencial $\vec{a}_t$ e a aceleração centrípeta $\vec{a}_{cp}$ não são nulas, pois a velocidade vetorial varia em módulo (movimento variado) e em direção (a trajetória é curva).

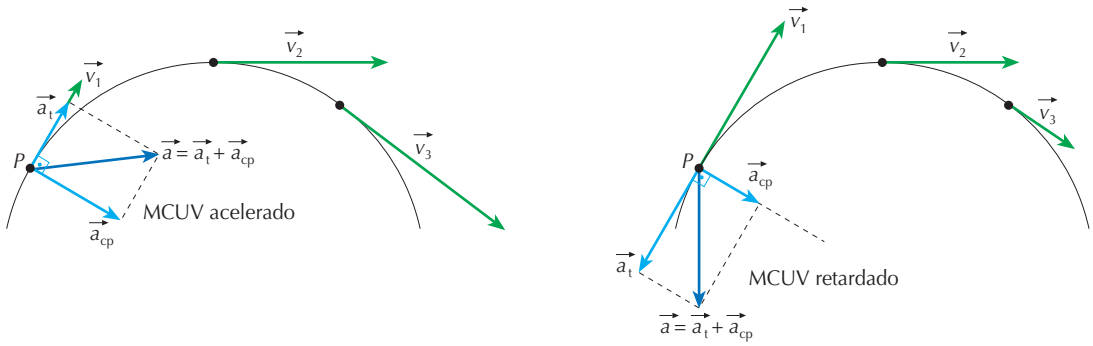
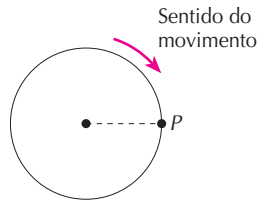


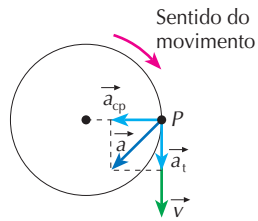
Figura 16.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R. 57 Uma partícula descreve um movimento circular uniformemente variado e acelerado no sentido horário. Represente a velocidade vetorial $\vec{v}$, a aceleração centrípeta $\vec{a}_{cp}$, a aceleração tangencial $\vec{a}_t$ e a aceleração resultante $\vec{a}$, no instante em que a partícula passa pelo ponto P indicado.



Solução:
A velocidade vetorial $\vec{v}$ é tangente à trajetória pelo ponto P e tem o sentido do movimento. A aceleração centrípeta $\vec{a}_{cp}$ é orientada para o centro da circunferência. A aceleração tangencial $\vec{a}_t$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$, pois o movimento é acelerado. A soma vetorial $\vec{a}_{cp} + \vec{a}_t$ define a aceleração resultante $\vec{a}$.



R. 58 Um ponto material percorre uma trajetória circular de raio $R = 20$ m com movimento uniformemente variado e aceleração escalar $\alpha = 5$ m/s^2. Sabendo-se que no instante $t = 0$ sua velocidade escalar é nula, determine no instante $t = 2$ s os módulos da:

a) velocidade vetorial;
b) aceleração tangencial;
c) aceleração centrípeta;
d) aceleração vetorial.

Solução:

a) Sendo o movimento uniformemente variado, temos $v = v_0 + \alpha t$. Sendo $v_0 = 0$, $\alpha = 5\ m/s^2$ e $t = 2\ s$, vem:

$$v = 0 + 5 \cdot 2 \Rightarrow v = 10\ m/s$$

A velocidade vetorial tem módulo igual ao módulo da velocidade escalar. Portanto:

$$\boxed{|\vec{v}| = |v| = 10\ m/s}$$

b) A aceleração tangencial tem módulo igual ao módulo da aceleração escalar:

$$\boxed{|\vec{a}_t| = |\alpha| = 5\ m/s^2}$$

c) O módulo da aceleração centrípeta é dado por $|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$. Sendo $v = 10\ m/s$ e $R = 20\ m$, vem:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{10^2}{20} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_{cp}| = 5\ m/s^2}$$

d) O módulo da aceleração resultante é dado por:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_{cp}|^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = 5\sqrt{2}\ m/s^2 \simeq 7\ m/s^2}$$

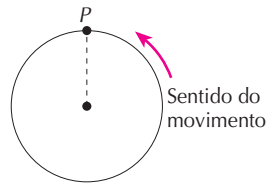
Respostas: a) 10 m/s; b) 5 m/s²; c) 5 m/s²; d) ≃7 m/s²

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

P. 152 Uma partícula realiza um movimento circular no sentido anti-horário. Represente a velocidade vetorial $\vec{v}$, a aceleração centrípeta $\vec{a}_{cp}$, a aceleração tangencial $\vec{a}_t$ e a aceleração resultante $\vec{a}$, no instante em que a partícula passa pelo ponto P indicado, nos casos em que:

a) o movimento é uniforme;

b) o movimento é uniformemente variado retardado.



P. 153 Uma partícula descreve um movimento circular de raio $R = 1\ m$ com a aceleração escalar $\alpha = 3\ m/s^2$. Sabe-se que no instante $t = 0$ a velocidade escalar da partícula é $v_0 = 0{,}5\ m/s$.
Determine no instante $t = 0{,}5\ s$ os módulos da:

a) velocidade vetorial;

b) aceleração centrípeta;

c) aceleração tangencial;

d) aceleração vetorial.

P. 154 Uma partícula descreve um movimento circular uniforme de raio $R = 2\ m$ e velocidade escalar $v = 3\ m/s$. Determine os módulos da:

a) aceleração centrípeta;

b) aceleração tangencial;

c) aceleração vetorial.

P. 155 Um movimento retilíneo uniformemente variado tem aceleração escalar $\alpha = 4\ m/s^2$. Determine os módulos da:

a) aceleração tangencial;

b) aceleração centrípeta;

c) aceleração vetorial.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seção 8.3

Composição de movimentos

Objetivos

- Identificar movimento de arrastamento e movimento relativo.
- Analisar o movimento resultante como uma composição entre o movimento relativo e o de arrastamento.
- Aplicar o princípio dos movimentos simultâneos de Galileu à composição de movimentos.

Termos e conceitos

- **movimento relativo**
- **movimento de arrastamento**
- **movimento resultante**
- **princípio da simultaneidade**

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considere uma placa de madeira em cima de uma mesa e uma formiga *P* situada na placa.

Figura 17.

Imagine a formiga movimentando-se em relação à placa, segundo a trajetória indicada na **figura 18A**. Se a formiga estivesse em repouso em relação à placa e esta se deslocasse para a direita, num movimento de translação uniforme, a trajetória da formiga seria a indicada na **figura 18B**. Na **figura 18C**, representamos uma possível trajetória da formiga, em relação a um observador na Terra, se ocorressem simultaneamente os dois movimentos citados.

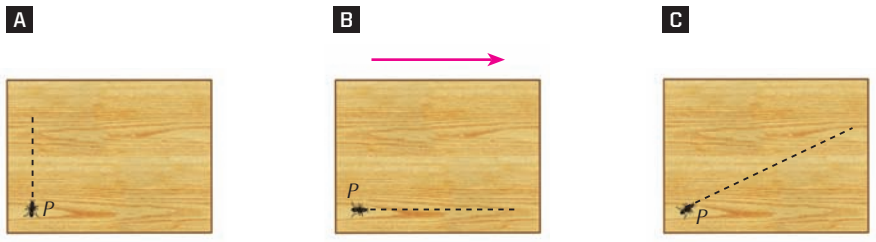


Figura 18.

Três movimentos podem ser considerados (**fig. 19**):

- o movimento da formiga *P* em relação à placa: **movimento relativo**;
- o movimento que a formiga *P* teria se estivesse em repouso em relação à placa e fosse arrastada por ela: **movimento de arrastamento** (o movimento de arrastamento é o movimento de translação da placa em relação à Terra);
- o movimento da formiga *P* em relação à Terra: **movimento resultante**.

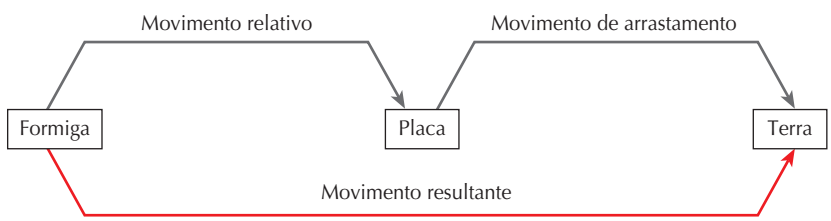


Figura 19.

A velocidade vetorial da formiga *P* em relação à placa é denominada **velocidade relativa** ($\vec{v}_{rel.}$).

Para cruzar o rio perpendicularmente, o barqueiro conduz o barco obliquamente em relação à correnteza.

A velocidade vetorial que a formiga *P* teria, se estivesse em repouso em relação à placa e fosse arrastada por ela, é denominada **velocidade de arrastamento** ($\vec{v}_{arr.}$). A velocidade de arrastamento é a velocidade de translação da placa em relação à Terra.

A velocidade vetorial de *P* em relação à Terra é denominada **velocidade resultante** ($\vec{v}_{res.}$).

Essas velocidades (**fig. 20**) relacionam-se pela igualdade vetorial:

$$\vec{v}_{res.} = \vec{v}_{rel.} + \vec{v}_{arr.}$$

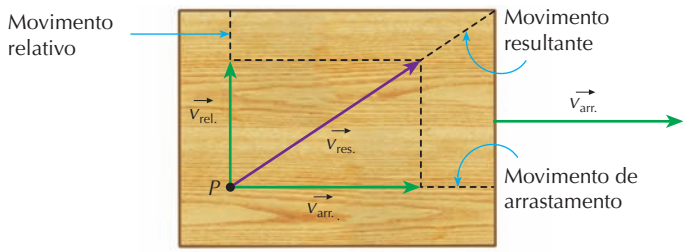


Figura 20.

Em vez de uma formiga, poderíamos ter um barco movimentando-se em relação às águas de um rio, as quais se movimentam em relação à Terra. Nesse caso, o movimento relativo é o do barco em relação às águas. O movimento das águas em relação à Terra, isto é, em relação à margem, é o movimento de arrastamento, e o movimento do barco em relação à Terra (margem) é o movimento resultante (**fig. 21**):

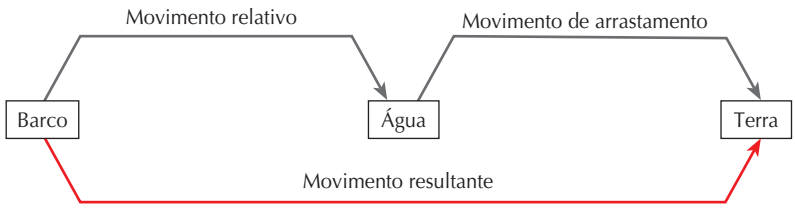


Figura 21.

Outros exemplos:

- O movimento de um avião em relação ao ar é o movimento relativo. O movimento do ar em relação à Terra, que arrasta o avião, é o movimento de arrastamento, e o movimento do avião em relação à Terra é o movimento resultante (**fig. 22**).

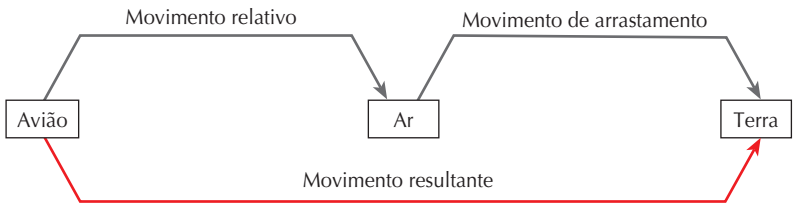


Figura 22.

- O movimento da chuva em relação a um carro é o movimento relativo. O movimento do carro em relação à Terra é o movimento de arrastamento e o movimento da chuva em relação à Terra é o movimento resultante (**fig. 23**).

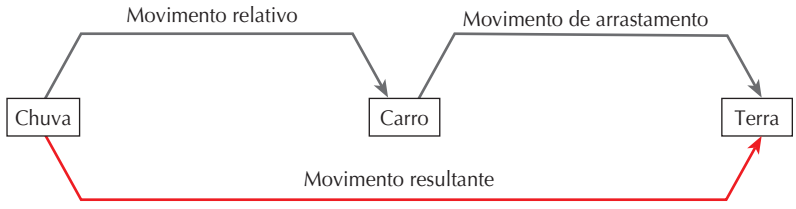


Figura 23.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Princípio da independência dos movimentos simultâneos (Galileu)

O estudo do movimento resultante a partir dos movimentos relativo e de arrastamento é denominado **composição de movimentos**.

Estudando os problemas relativos a um movimento composto, isto é, resultante da composição de dois ou mais movimentos, Galileu propôs o **princípio da simultaneidade** ou **princípio da independência dos movimentos simultâneos**.

> Se um corpo apresenta um movimento composto, cada um dos movimentos componentes se realiza como se os demais não existissem e no mesmo intervalo de tempo.

Assim, por exemplo, considere um barco que se movimenta mantendo seu eixo numa direção perpendicular à margem de um rio. Partindo de *A*, o barco não atinge a margem oposta em *B*, e sim em *C*, devido à correnteza (**fig. 24**). No movimento relativo, o barco percorre a trajetória *AB* com velocidade $\vec{v}_{rel.}$. No movimento resultante, o barco percorre a trajetória *AC* com velocidade $\vec{v}_{res.}$ e, devido à correnteza, o barco é arrastado de *B* a *C* com velocidade $\vec{v}_{arr.}$. Os dois movimentos ocorrem ao mesmo tempo, mas um não interfere na realização do outro.

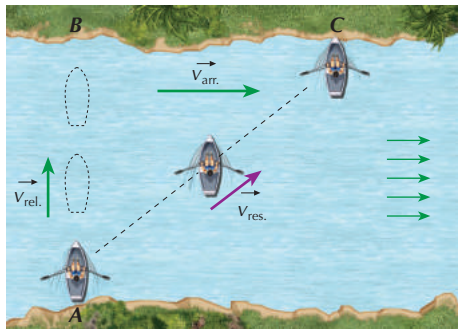


Figura 24.

De acordo com Galileu, o intervalo de tempo gasto no movimento relativo é igual ao intervalo de tempo gasto no movimento resultante, que é igual ao intervalo de tempo gasto no movimento de arrastamento.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R. 59 Um barco está com o motor funcionando em regime constante; sua velocidade em relação à água tem módulo igual a 5 m/s. A correnteza do rio movimenta-se em relação às margens com 2 m/s, constante. Determine o módulo da velocidade do barco em relação às margens em quatro situações distintas:

a) o barco navega paralelo à correnteza e no seu próprio sentido (rio abaixo);

b) o barco navega paralelo à correnteza e em sentido contrário (rio acima);

c) o barco movimenta-se mantendo seu eixo numa direção perpendicular à margem;

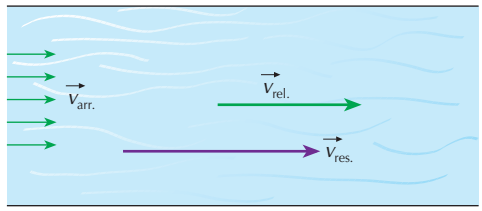
d) o barco movimenta-se indo de um ponto a outro situado exatamente em frente, na margem oposta.

Solução:

O movimento do barco em relação à água é o movimento relativo ($|\vec{v}_{rel.}| = 5$ m/s). O movimento das águas em relação às margens é o movimento de arrastamento ($|\vec{v}_{arr.}| = 2$ m/s). O movimento do barco em relação às margens é o movimento resultante ($\vec{v}_{res.}$):

$$\underset{\text{Barco, margens}}{\vec{v}_{res.}} = \underset{\text{Barco, água}}{\vec{v}_{rel.}} + \underset{\text{Água, margens}}{\vec{v}_{arr.}}$$

a) Rio abaixo:

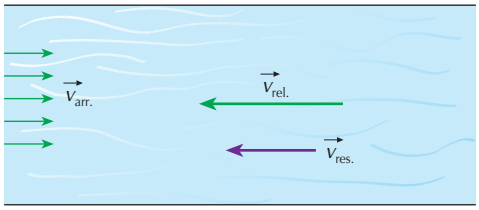


A velocidade resultante $\vec{v}_{res.}$ tem módulo igual à soma dos módulos de $\vec{v}_{rel.}$ e $\vec{v}_{arr.}$, pois esses vetores têm a mesma direção e sentido:

$|\vec{v}_{res.}| = |\vec{v}_{rel.}| + |\vec{v}_{arr.}| = 5 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}_{res.}| = 7 \text{ m/s}}$

b) Rio acima:

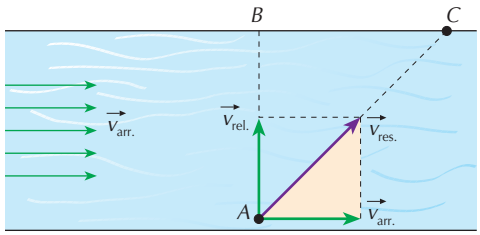


A velocidade resultante $\vec{v}_{res.}$ tem módulo igual à diferença dos módulos de $\vec{v}_{rel.}$ e $\vec{v}_{arr.}$, pois esses vetores têm a mesma direção, mas sentidos contrários:

$|\vec{v}_{res.}| = |\vec{v}_{rel.}| - |\vec{v}_{arr.}| = 5 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}_{res.}| = 3 \text{ m/s}}$

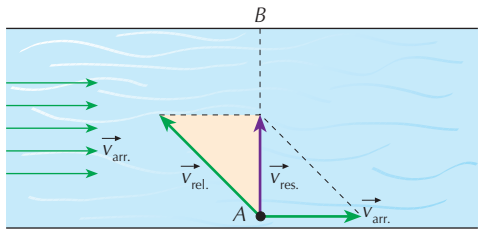
c) O barco atinge a outra margem num ponto rio abaixo, em relação ao ponto de partida. A velocidade resultante $\vec{v}_{res.}$ tem seu módulo obtido pelo teorema de Pitágoras:



$|\vec{v}_{res.}|^2 = |\vec{v}_{rel.}|^2 + |\vec{v}_{arr.}|^2$ (triângulo destacado) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{v}_{res.}| = \sqrt{5^2 + 2^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_{res.}| \simeq 5{,}4 \text{ m/s}}$

d) Para se atingir o ponto exatamente em frente ao ponto de partida deve-se dispor o barco obliquamente em relação à correnteza, de modo que a velocidade resultante tenha direção perpendicular à margem.



O teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo destacado fornece:

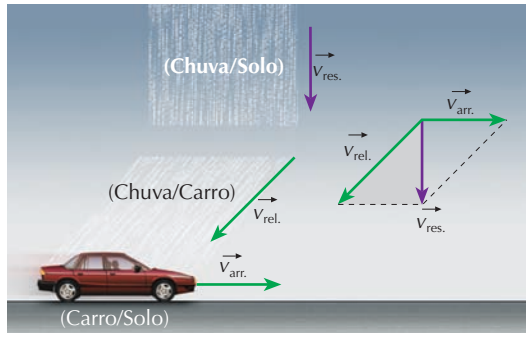
$|\vec{v}_{rel.}|^2 = |\vec{v}_{res.}|^2 + |\vec{v}_{arr.}|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{v}_{res.}| = \sqrt{5^2 - 2^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_{res.}| \simeq 4{,}6 \text{ m/s}}$

Respostas: a) 7 m/s; b) 3 m/s; c) $\simeq$ 5,4 m/s; d) $\simeq$ 4,6 m/s

R. 60 Num dia sem vento, a chuva cai verticalmente em relação ao solo com velocidade de 10 m/s. Um carro se desloca horizontalmente com 20 m/s em relação ao solo. Determine o módulo da velocidade da chuva em relação ao carro.

Solução:



O movimento da chuva em relação ao carro é o movimento relativo, cujo módulo da velocidade ($\vec{v}_{rel.}$) queremos determinar. O movimento do carro em relação ao solo é o movimento de arrastamento ($|\vec{v}_{arr.}| = 20$ m/s). O movimento resultante é o da chuva em relação ao solo ($|\vec{v}_{res.}| = 10$ m/s). A aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo destacado permite obter $|\vec{v}_{rel.}|$:

$|\vec{v}_{rel.}|^2 = |\vec{v}_{res.}|^2 + |\vec{v}_{arr.}|^2$

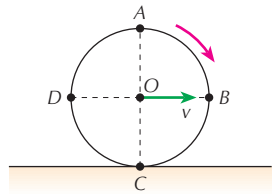
$|\vec{v}_{rel.}| = \sqrt{10^2 + 20^2}$

$|\vec{v}_{rel.}| = 10\sqrt{5}$ m/s

$\boxed{|\vec{v}_{rel.}| \simeq 22{,}4 \text{ m/s}}$

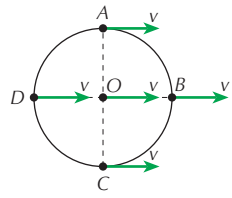
Resposta: $\simeq$ 22,4 m/s

R. 61 Um disco rola sem escorregar sobre o solo suposto horizontal, mantendo-se sempre vertical. A velocidade do centro O em relação à Terra tem módulo v. Determine os módulos das velocidades dos pontos A, B, C e D, em relação à Terra, no instante mostrado na figura.

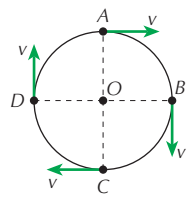


Solução:

O movimento do disco pode ser interpretado como a composição de dois movimentos: um de translação e outro de rotação, em torno do centro O.

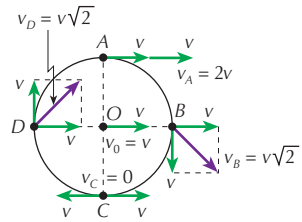


Translação



Rotação

Observe que, no movimento de translação, todos os pontos do disco apresentam a mesma velocidade v do centro O. No movimento de rotação, todos os pontos periféricos giram em torno do centro O com a mesma velocidade em módulo.



Movimento resultante

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

É importante notar que, no movimento resultante, o ponto de contato C deve possuir velocidade nula em relação à Terra, pois o disco rola sem escorregar. Sendo assim, o módulo da velocidade dos pontos periféricos, na rotação, também deve ser igual a v, pois de outro modo a velocidade resultante no ponto de contato não seria nula. Portanto, as velocidades dos pontos A, B, C e D, em relação à Terra, possuem módulos:

$$v_A = 2v \qquad v_B = v\sqrt{2} \qquad v_C = 0 \qquad v_D = v\sqrt{2}$$

R. 62 Um ponto material realiza um movimento no plano, tal que suas coordenadas são dadas pelas equações $x = 2 + 6t$ e $y = 5 + 8t$, com x e y medidos em metros e t em segundos. Determine:

a) a velocidade do ponto material;

b) a equação da trajetória descrita pelo ponto.

Solução:

a) O movimento resultante descrito pelo ponto material pode ser considerado a composição de dois movimentos uniformes realizados segundo dois eixos ortogonais x e y. As equações horárias desses movimentos são, respectivamente:

$$x = 2 + 6t \quad \text{e} \quad y = 5 + 8t$$

Como são movimentos uniformes ($s = s_0 + vt$), as velocidades escalares nas duas direções valem:

$v_x = 6$ m/s e $v_y = 8$ m/s

A velocidade resultante $\vec{v}$ é a soma das velocidades vetoriais $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$, cujos módulos são iguais aos módulos das velocidades escalares. Então:

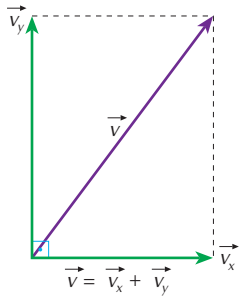
$v^2 = v_x^2 + v_y^2$

(teorema de Pitágoras)

$v^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64$

$v^2 = 100$

$\boxed{v = 10 \text{ m/s}}$



b) A equação da trajetória relaciona as coordenadas x e y, sendo obtida pela eliminação do tempo t das duas equações anteriores. De $x = 2 + 6t$, obtemos:

$$6t = x - 2 \Rightarrow t = \frac{x - 2}{6}$$

Substituindo t por $\frac{x - 2}{6}$ em $y = 5 + 8t$, vem:

$$y = 5 + 8\left(\frac{x - 2}{6}\right) \Rightarrow$$

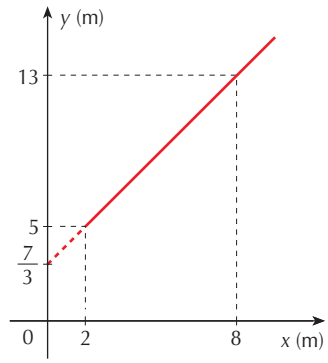
$$\Rightarrow y = 5 + 4\left(\frac{x - 2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 5 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}}$$

(equação da trajetória)

Graficamente, essa equação é representada por uma reta, que traduz no plano exatamente a trajetória descrita pelo ponto. Na figura, destacamos o instante inicial $t = 0$ ($x = 2$ m, $y = 5$ m) e o instante $t = 1$ s ($x = 8$ m, $y = 13$ m).



Respostas: a) 10 m/s; b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$

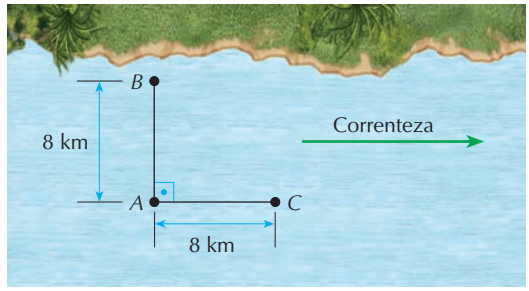
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

P. 156 Um barco alcança a velocidade de 18 km/h em relação às margens do rio, quando se desloca no sentido da correnteza, e de 12 km/h, quando se desloca em sentido contrário ao da correnteza. Determine a velocidade do barco em relação às águas e a velocidade das águas em relação às margens.

P. 157 Um pescador rema perpendicularmente às margens de um rio com velocidade de 3 km/h em relação às águas. As águas do rio possuem velocidade de 4 km/h em relação às margens. Determine a velocidade do pescador em relação às margens.

P. 158 A figura representa um rio, no qual as águas fluem com a velocidade de 3 km/h. No rio estão fixadas três balizas, A, B e C. As balizas A e C estão alinhadas na direção da correnteza.



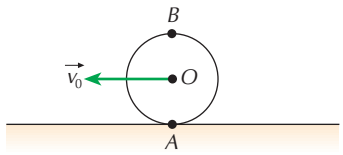
Dois nadadores, capazes de desenvolver a velocidade constante de 5 km/h, iniciam, respectiva e simultaneamente, os percursos de A a B e de A a C, percorrendo-os em linha reta em ida e volta. Calcular a diferença entre os intervalos de tempo necessários para os nadadores completarem os respectivos percursos, dando a resposta em horas.

P. 159 (FCC-BA) A janela de um trem tem dimensões de 80 cm na horizontal e 60 cm na vertical. O trem está em movimento retilíneo uniforme horizontal, com velocidade de valor v. Um passageiro, dentro do trem, vê as gotas de chuva caírem inclinadas na direção da diagonal da janela. Supondo que as gotas, em relação ao solo, estejam caindo com velocidade v_g, na vertical, determine essa velocidade v_g em função da velocidade v.

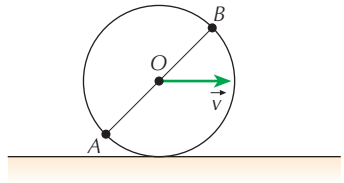
P. 160 (Fuvest-SP) Um disco roda sobre uma superfície plana, sem deslizar. A velocidade do centro O é $\vec{v}_0$. Em relação ao plano:

a) Qual é a velocidade $\vec{v}_A$ do ponto A?

b) Qual é a velocidade $\vec{v}_B$ do ponto B?



P. 161 (FEI-SP) A roda da figura rola sem escorregar, paralelamente a um plano vertical fixo.



O centro O da roda tem velocidade constante $v = 5$ m/s. Qual é o módulo da velocidade do ponto B no instante em que o diâmetro AB é paralelo ao plano de rolamento?

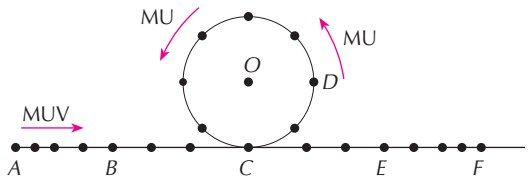
P. 162 Um ponto material realiza um movimento em um plano tal que suas coordenadas são dadas pelas equações $x = 1 + 3t$ e $y = 1 + 4t$, com x e y em metros e t em segundos. Determine:

a) a velocidade do ponto material;

b) a equação da trajetória.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS DE RECAPITULAÇÃO

P. 163 As diversas posições de uma partícula estão representadas na figura. A partícula percorre, primeiro, a trajetória retilínea AC; a seguir, a circunferência de centro O; e, finalmente, a trajetória retilínea CF. Os intervalos de tempo entre duas posições consecutivas são iguais. Os sentidos e os tipos de movimento também estão indicados na figura.



Represente a velocidade vetorial e a aceleração vetorial da partícula nos instantes em que ela passa pelos pontos B, D e E.

P. 164 (FEI-SP) Uma roda-gigante de raio 36,0 m parte do repouso. A periferia da roda acelera a uma taxa constante de 3,0 m/s^2. Após 4,0 s, qual o módulo da aceleração vetorial de um ponto situado na periferia da roda?

P. 165 As águas de um rio têm velocidade de 3 km/h. Um barco com velocidade de 4 km/h em relação às águas deve atravessar esse rio, que tem 800 m de largura, partindo numa direção perpendicular à margem.
Determine:

a) o tempo de travessia;

b) a distância entre o ponto de chegada do barco e o ponto situado em frente ao de partida;

c) a distância efetivamente percorrida pelo barco na travessia;

d) qual será a velocidade resultante do barco, se ele partir numa direção adequada para atingir o ponto situado exatamente em frente ao ponto de partida, na margem oposta.

P. 166 (UFBA) Um pássaro parte em voo retilíneo e horizontal do seu ninho para uma árvore distante 75 m e volta, sem interromper o voo, sobre a mesma trajetória. Sabendo-se que sopra um vento de 5 m/s na direção e sentido da árvore para o ninho e que o pássaro mantém, em relação à massa de ar, uma velocidade constante de 10 m/s, determine, em segundos, o tempo gasto na trajetória de ida e volta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

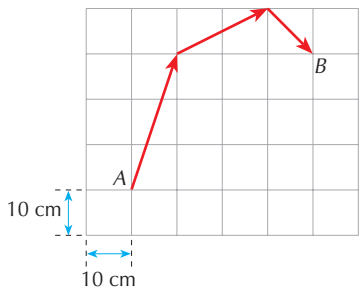
Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
A Física em nosso Mundo: *Como utilizar um guia de ruas*

T. 129 (UFPB) Um cidadão está à procura de uma festa. Ele parte de uma praça, com a informação de que o endereço procurado estaria situado a 2 km ao norte. Após chegar ao referido local, ele recebe nova informação de que deveria se deslocar 4 km para o leste. Não encontrando ainda o endereço, o cidadão pede informação a outra pessoa, que diz estar a festa acontecendo a 5 km ao sul daquele ponto. Seguindo essa dica, ele finalmente chega ao evento. Na situação descrita, o módulo do vetor deslocamento do cidadão, da praça até o destino final, é:

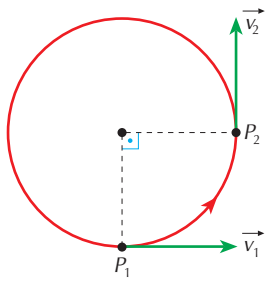
a) 11 km **c)** 5 km **e)** 3 km
b) 7 km **d)** 4 km

T. 130 (Mackenzie-SP) A figura em escala mostra os vetores deslocamento de uma formiga, que, saindo do ponto A, chegou ao ponto B, após 3 minutos e 20 s. O módulo do vetor velocidade média do movimento da formiga, nesse trajeto, foi de:

a) 0,15 cm/s
b) 0,20 cm/s
c) 0,25 cm/s
d) 0,30 cm/s
e) 0,40 cm/s



T. 131 Uma partícula realiza um movimento circular uniforme, no sentido anti-horário, com velocidade escalar 8 m/s.
Ao passar do ponto P_1 ao ponto P_2, decorre um intervalo de tempo de 4 s. É correto afirmar que o módulo da aceleração vetorial média entre as posições P_1 e P_2 é igual a:



a) $2\sqrt{2}$ m/s² **c)** 1 m/s² **e)** zero
b) 2 m/s² **d)** $\sqrt{2}$ m/s²

T. 132 (PUC-RS) As informações a seguir referem-se a um movimento retilíneo realizado por um objeto qualquer:

I. A velocidade vetorial pode mudar de sentido.
II. A velocidade vetorial tem sempre módulo constante.
III. A velocidade vetorial tem direção constante.

A alternativa que representa corretamente o movimento retilíneo é:

a) I, II e III **d)** II e III
b) somente III **e)** somente I e III
c) somente II

T. 133 (UFPA) Uma partícula percorre, com movimento uniforme, uma trajetória não retilínea. Em cada instante teremos que:

a) os vetores velocidade e aceleração são paralelos entre si.
b) a velocidade vetorial é nula.
c) os vetores velocidade e aceleração são perpendiculares entre si.
d) os vetores velocidade e aceleração têm direções independentes.
e) o valor do ângulo entre o vetor velocidade e o vetor aceleração muda de ponto a ponto.

T. 134 (FEI-SP) Uma partícula descreve uma circunferência com movimento uniforme. Pode-se concluir que:

a) sua velocidade vetorial é constante.
b) sua aceleração tangencial é não nula.
c) sua aceleração centrípeta tem módulo constante.
d) sua aceleração vetorial resultante é nula.
e) suas acelerações tangencial e resultante são iguais, em módulo.

T. 135 (UEPB) De acordo com os conceitos estudados em Cinemática, complete adequadamente a coluna da direita com os itens da esquerda:

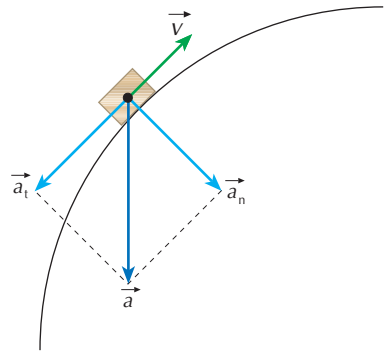
(1) Movimento retilíneo e uniforme
(2) Movimento retilíneo e uniformemente variado
(3) Movimento circular e uniforme
(4) Movimento circular e uniformemente variado

( ) Velocidade vetorial de direção constante e módulo variável
( ) Velocidade vetorial constante
( ) Velocidade vetorial variável em direção e módulo
( ) Velocidade vetorial de módulo constante e direção variável

Assinale a alternativa que corresponde à sequência correta da numeração:

a) 1, 2, 3, 4 **c)** 3, 4, 1, 2 **e)** 3, 4, 2, 1
b) 2, 1, 4, 3 **d)** 1, 3, 4, 2

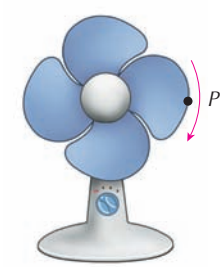
T. 136 (Fatec-SP) Na figura, representa-se um bloco em movimento sobre uma trajetória curva, bem como o vetor velocidade $\vec{v}$, o vetor aceleração $\vec{a}$ e seus componentes intrínsecos, aceleração tangencial $\vec{a}_t$ e aceleração normal $\vec{a}_n$.

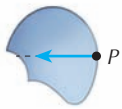


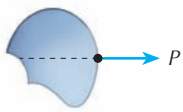
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

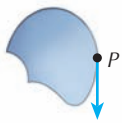
Analisando-se a figura, conclui-se que:
a) o módulo da velocidade está aumentando.
b) o módulo da velocidade está diminuindo.
c) o movimento é uniforme.
d) o movimento é necessariamente circular.
e) o movimento é retilíneo.

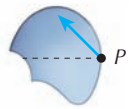
T. 137 (UFMG) Um ventilador acaba de ser desligado e está parando vagarosamente, girando no sentido horário.
A direção e o sentido da aceleração da pá do ventilador no ponto *P* é:



a) 

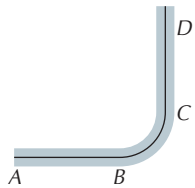
b) 

c) 

d) 

e)

T. 138 (UEL-PR) Uma pista é constituída por três trechos: dois retilíneos, *AB* e *CD*, e um circular, *BC*, conforme o esquema.



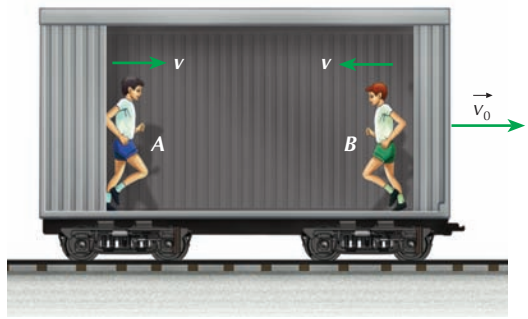
Se um automóvel percorre toda a pista com velocidade escalar constante, o módulo da sua aceleração será:
a) nulo em todos os trechos.
b) constante, não nulo, em todos os trechos.
c) constante, não nulo, nos trechos *AB* e *CD*.
d) constante, não nulo apenas no trecho *BC*.
e) variável apenas no trecho *BC*.

O enunciado a seguir refere-se às questões **T.139** e **T.140**.
(PUC-SP) Um móvel parte do repouso e percorre uma trajetória circular de raio 100 m, assumindo movimento uniformemente acelerado de aceleração escalar 1 m/s^2.

T. 139 As componentes tangencial e centrípeta da aceleração valem, respectivamente, após 10 s:
a) 1 m/s^2 e 10 m/s^2
b) 10 m/s^2 e 1 m/s^2
c) 10 m/s^2 e 10 m/s^2
d) 10 m/s^2 e 100 m/s^2
e) 1 m/s^2 e 1 m/s^2

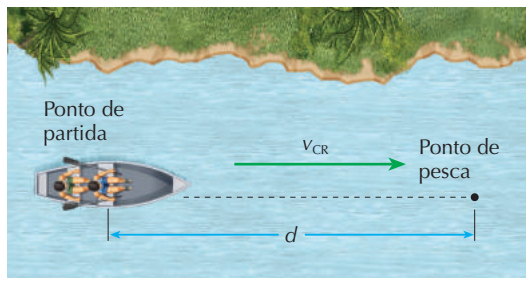
T. 140 O ângulo formado entre a aceleração total e o raio da trajetória no instante $t = 10$ s vale:
a) 180°
b) 90°
c) 60°
d) 45°
e) 30°

T. 141 (Fuvest-SP) Num vagão ferroviário, que se move com velocidade $v_0 = 3$ m/s em relação aos trilhos, estão dois meninos, *A* e *B*, que correm um em direção ao outro, cada um com velocidade $v = 3$ m/s em relação ao vagão.



As velocidades dos meninos *A* e *B* em relação aos trilhos serão respectivamente:
a) 6 m/s e 0 m/s
b) 3 m/s e 3 m/s
c) 0 m/s e 9 m/s
d) 9 m/s e 0 m/s
e) 0 m/s e 6 m/s

T. 142 (UFSC) Descendo um rio em sua canoa, sem remar, dois pescadores levam 300 segundos para atingir o seu ponto de pesca, na mesma margem do rio e em trajetória retilínea. Partindo da mesma posição e remando, sendo a velocidade da canoa, em relação ao rio, igual a 2,0 m/s, eles atingem o seu ponto de pesca em 100 segundos. Após a pescaria, remando contra a correnteza do rio, eles gastam 600 segundos para retornar ao ponto de partida.

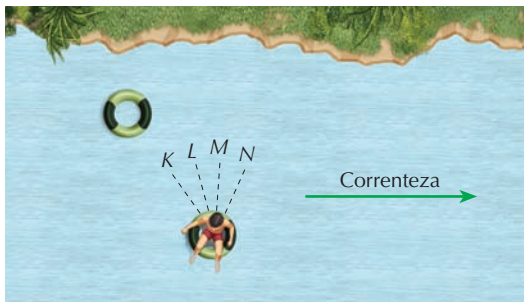


Considerando que a velocidade da correnteza v_{CR} é constante, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).
01) Quando os pescadores remaram rio acima, a velocidade da canoa, em relação à margem, foi igual a 4,00 m/s.
02) Não é possível calcular a velocidade com que os pescadores retornaram ao ponto de partida, porque a velocidade da correnteza não é conhecida.
04) Quando os pescadores remaram rio acima, a velocidade da canoa, em relação ao rio, foi de 1,50 m/s.
08) A velocidade da correnteza do rio é 1,00 m/s.
16) O ponto de pesca fica a 300 metros do ponto de partida.
32) Não é possível determinar a distância do ponto de partida até o ponto de pesca.
64) Como a velocidade da canoa foi de 2,0 m/s, quando os pescadores remaram rio abaixo, então, a distância do ponto de partida ao ponto de pesca é 200 m.

Dê, como resposta, a soma dos números que precedem as proposições corretas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

T. 143 (UFMG) Um menino flutua em uma boia que está se movimentando, levada pela correnteza de um rio. Uma outra boia, que flutua no mesmo rio a uma certa distância do menino, também está descendo com a correnteza.
A posição das duas boias e o sentido da correnteza estão indicados nesta figura:

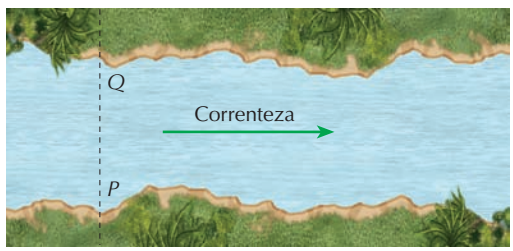


Considere que a velocidade da correnteza é a mesma em todos os pontos do rio.
Nesse caso, para alcançar a segunda boia, o menino deve nadar na direção indicada pela linha:
a) *K* **b)** *L* **c)** *M* **d)** *N*

T. 144 (UFMG) Um barco tenta atravessar um rio com 1,0 km de largura. A correnteza do rio é paralela às margens e tem velocidade de 4,0 km/h. A velocidade do barco, em relação à água, é de 3,0 km/h, perpendicularmente às margens.
Nessas condições, pode-se afirmar que o barco:
a) atravessará o rio em 12 minutos.
b) atravessará o rio em 15 minutos.
c) atravessará o rio em 20 minutos.
d) nunca atravessará o rio.

T. 145 (PUC-RS) A correnteza de um rio tem velocidade constante de 3,0 m/s em relação às margens. Um barco, que se movimenta com velocidade constante de 5,0 m/s em relação à água, atravessa o rio, indo em linha reta, de um ponto *A* a outro ponto *B*, situado imediatamente à frente, na margem oposta. Sabendo-se que a direção $\overline{AB}$ é perpendicular à velocidade da correnteza, pode-se afirmar que a velocidade do barco em relação às margens é de:
a) 2,0 m/s **c)** 5,0 m/s **e)** 8,0 m/s
b) 4,0 m/s **d)** 5,8 m/s

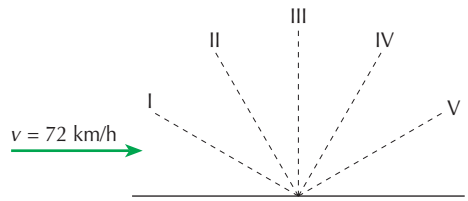
T. 146 (PUC-Campinas-SP) Um barco sai de um ponto *P* para atravessar um rio de 4,0 km de largura. A velocidade da correnteza, em relação às margens do rio, é de 6,0 km/h. A travessia é feita segundo a menor distância *PQ*, como mostra o esquema representado a seguir, e dura 30 minutos.



A velocidade do barco em relação à correnteza, em km/h, é de:
a) 4,0 **d)** 10
b) 6,0 **e)** 12
c) 8,0

T. 147 (Univale-MG) Um ultraleve mantém a velocidade de 120 km/h em relação ao ar, estando o nariz apontando para Leste. Sopra vento do Norte para o Sul com velocidade de 90 km/h. Nessas condições, podemos afirmar que a velocidade do ultraleve em relação à Terra é:
a) 150 km/h, na direção Sudeste.
b) 30 km/h, na direção Leste.
c) 210 km/h, na direção Sudoeste.
d) 50 km/h, na direção Nordeste.
e) 210 km/h, na direção Sudeste.

T. 148 (Fesp-SP) Um motorista viaja em um carro, por uma estrada em linha reta, sob uma chuva que cai verticalmente a uma velocidade constante de 10 m/s (em relação ao solo).



Se o carro se move da esquerda para a direita com velocidade constante igual a 72 km/h, para o motorista as gotas de chuva parecem estar caindo na direção I, II, III, IV ou V, conforme o esquema?
a) I **d)** IV
b) II **e)** V
c) III

T. 149 (Fatec-SP) Sob a chuva que cai verticalmente, uma pessoa caminha horizontalmente com velocidade 1,0 m/s, inclinando o guarda-chuva a 30° (em relação à vertical) para resguardar-se o melhor possível. A velocidade da chuva em relação ao solo (dado: tg 60° = 1,7):
a) é 1,7 m/s.
b) é 2,0 m/s.
c) é 0,87 m/s.
d) depende do vento.
e) depende da altura da nuvem de origem.

T. 150 (FCMSCSP-SP) Uma pedra se engasta no pneu de um automóvel que está com velocidade uniforme de 90 km/h. Supondo que o pneu não patina nem escorrega, e que o sentido de movimento do automóvel é o positivo, os valores algébricos mínimo e máximo da velocidade da pedra em relação ao solo e em km/h são:
a) −180 e 180 **d)** 0 e 90
b) −90 e 90 **e)** 0 e 180
c) −90 e 180

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Capítulo

9

Lançamento horizontal e lançamento oblíquo no vácuo

Na análise dos lançamentos horizontais ou oblíquos, deve-se levar em conta o princípio da independência dos movimentos simultâneos, ou seja, em um movimento composto, cada componente do movimento pode ser estudado independentemente e com simultaneidade de tempo.

9.1 Lançamento horizontal no vácuo

O lançamento horizontal pode ser considerado o resultado da composição de dois movimentos simultâneos: queda livre (MUV) e movimento horizontal (MU).

9.2 Lançamento oblíquo no vácuo

O lançamento oblíquo pode ser considerado o resultado da composição de dois movimentos retilíneos, um uniforme (horizontal) e o outro uniformemente variado (vertical).

No movimento realizado pelas fagulhas da solda, a trajetória descrita é parabólica. Os movimentos de corpos que descrevem trajetórias semelhantes podem ser considerados composições de dois movimentos simultâneos.

Seção 9.1

Lançamento horizontal no vácuo

Objetivos

- Analisar os movimentos dos corpos lançados horizontalmente, decompondo-os em um movimento vertical e em um movimento horizontal.
- Estabelecer a forma da trajetória, e velocidade e aceleração vetoriais dos corpos lançados horizontalmente.

Termos e conceitos

- queda livre
- direção tangente
- módulo da velocidade
- direção da velocidade

Quando um corpo é lançado horizontalmente no vácuo, nas proximidades da superfície terrestre, ele descreve, **em relação à Terra, uma trajetória parabólica** (fig. 1).

Esse movimento pode ser considerado, de acordo com o princípio da simultaneidade, o resultado da composição de dois movimentos simultâneos e independentes: **queda livre** e **movimento horizontal**.

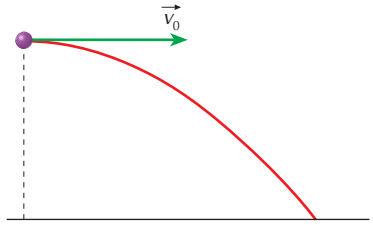


Figura 1. A trajetória de um corpo lançado horizontalmente no vácuo é um arco de parábola.

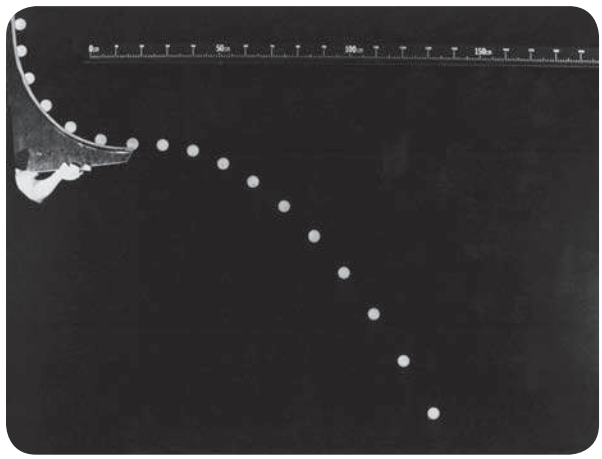


Foto estroboscópica que mostra a trajetória parabólica descrita por um corpo lançado horizontalmente.

Em uma cachoeira, a água é lançada horizontalmente, descrevendo em sua queda uma trajetória parabólica.

1 Queda livre

É um movimento vertical, sob a ação exclusiva da gravidade. Trata-se de um movimento uniformemente variado, pois sua aceleração se mantém constante (aceleração da gravidade).

2 Movimento horizontal

É um movimento uniforme, pois não existe nenhuma aceleração na direção horizontal; o corpo o realiza por inércia, mantendo a velocidade $\vec{v}_0$ com que foi lançado.

Em cada ponto da trajetória, a velocidade resultante $\vec{v}$ do corpo, cuja direção é tangente à trajetória, é dada pela soma vetorial da velocidade horizontal $\vec{v}_0$, que permanece constante, e da velocidade vertical $\vec{v}_y$, cujo módulo varia, pois a aceleração da gravidade tem direção vertical (**fig. 2**):

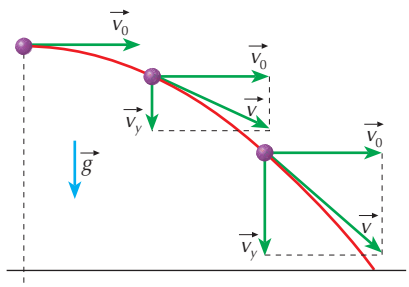
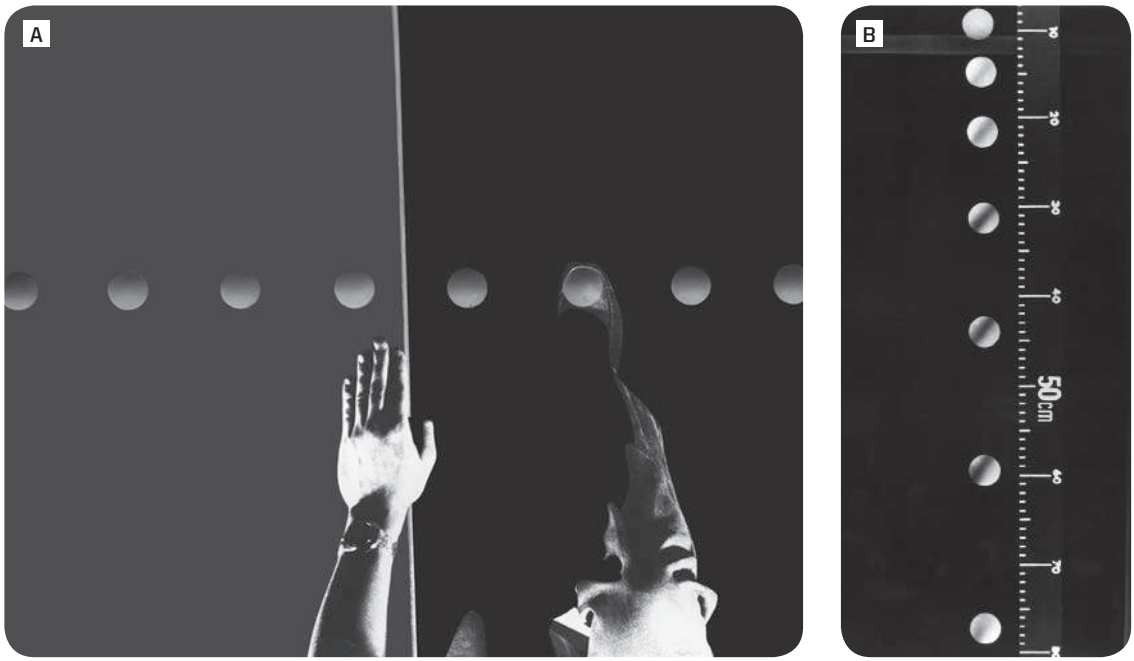


Figura 2.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_y$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim, no lançamento horizontal, à medida que o corpo se movimenta, o módulo de sua velocidade $\vec{v}$ cresce em virtude do aumento do módulo da velocidade vertical $\vec{v}_y$.



Fotos estroboscópicas do movimento de uma esfera que abandona uma mesa a certa altura do solo, tiradas de duas posições diferentes. Em (A), tirada de cima, percebe-se o movimento uniforme na direção horizontal: a mão do operador indica o ponto em que o corpo abandona a mesa. Em (B), tirada de frente, destaca-se o movimento da esfera na direção vertical (queda livre), após abandonar a mesa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R. 63 Após uma enchente, um grupo de pessoas ficou ilhado numa região. Um avião de salvamento, voando horizontalmente a uma altura de 720 m e mantendo uma velocidade de 50 m/s, aproxima-se do local para que um pacote com medicamentos e alimentos seja lançado para as pessoas isoladas. A que distância, na direção horizontal, o pacote deve ser abandonado para que caia junto às pessoas? Despreze a resistência do ar e adote $g = 10\ m/s^2$.

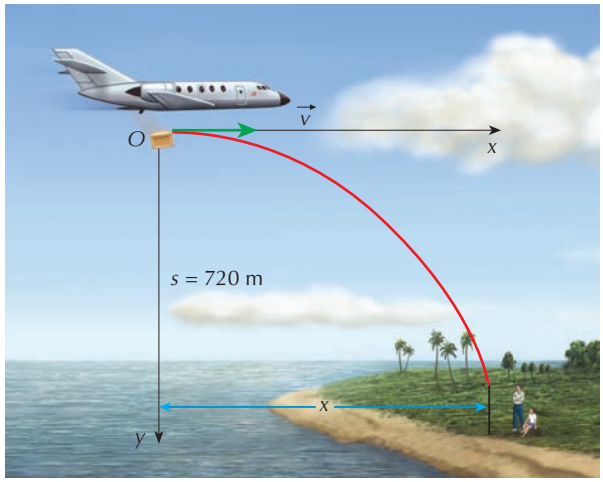
Solução:

O pacote cai e, ao mesmo tempo, avança horizontalmente. Esse avanço horizontal se dá por inércia, acompanhando o movimento do avião. Assim, o pacote deve ser abandonado numa posição tal que, no intervalo de tempo que leva para cair, ele percorra a distância horizontal necessária para chegar junto às pessoas. Calculamos o tempo de queda como se o pacote caísse livremente na direção vertical.

$$s = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow 720 = \frac{10}{2}t^2 \Rightarrow t^2 = 144 \Rightarrow \boxed{t = 12\ s}$$

Durante esses 12 s, o pacote avança com movimento uniforme na direção horizontal e com velocidade constante $v = 50$ m/s. Assim:

$$x = vt \Rightarrow x = 50 \cdot 12 \Rightarrow \boxed{x = 600\ m}$$



Resposta: O pacote deve ser abandonado quando o avião estiver a 600 m do grupo, medidos na direção horizontal.

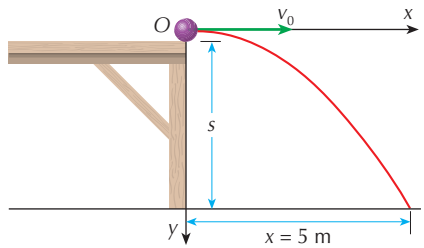
R. 64 Uma esfera rola com velocidade constante de 10 m/s sobre uma mesa horizontal. Ao abandonar a mesa, ela fica sujeita exclusivamente à ação da gravidade ($g = 10\ m/s^2$), atingindo o solo num ponto situado a 5 m do pé da mesa. Determine:

a) o tempo de queda;

b) a altura da mesa em relação ao solo;

c) o módulo da velocidade da esfera ao chegar ao solo.

Solução:



a) Ao abandonar a mesa, a esfera apresenta, na direção horizontal, movimento uniforme com velocidade $v_0 = 10$ m/s. Assim: $x = v_0 t \Rightarrow 5 = 10t \Rightarrow \boxed{t = 0{,}5\ s}$

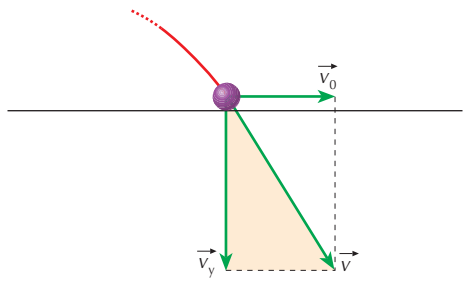
Esse tempo é também o tempo de queda, cujo movimento é simultâneo.

b) Simultaneamente ao movimento horizontal, a esfera cai de uma altura s em queda livre:

$$s = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow s = \frac{10}{2} \cdot (0{,}5)^2 \Rightarrow \boxed{t = 1{,}25\ m}$$

c) Ao chegar ao solo, a velocidade vetorial da esfera pode ser considerada resultante da composição da velocidade horizontal que se mantém constante e da velocidade vertical ($\vec{v}_y$), cujo módulo é dado por: $v_y = v_{0_y} + gt$, sendo: $v_{0y} = 0$; $g = 10\ m/s^2$; $t = 0{,}5$ s

Assim, temos: $v_y = 0 + 10 \cdot 0{,}5 \Rightarrow v_y = 5$ m/s



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo destacado na figura, obtemos o módulo da velocidade vetorial da esfera ao chegar ao solo:

$$v^2 = v_0^2 + v_y^2 \Rightarrow v^2 = (10)^2 + (5)^2 = 100 + 25 \Rightarrow v^2 = 125 \Rightarrow \boxed{v \simeq 11{,}2\ m/s}$$

Respostas: a) 0,5 s; b) 1,25 m; c) ≃11,2 m/s

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

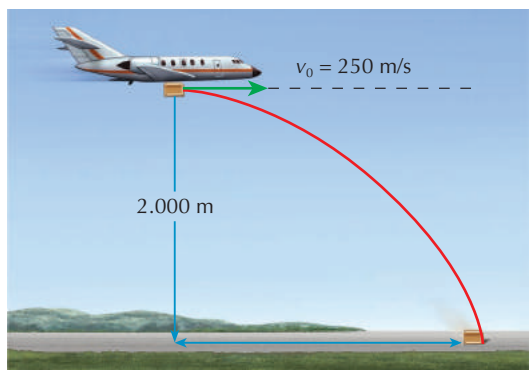
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

P. 167 Um avião voa horizontalmente a 2.000 m de altura com velocidade de 250 m/s no instante em que abandona um pacote. Adote $g = 10\ m/s^2$ e despreze a ação do ar. Determine:

a) o tempo de queda do pacote;

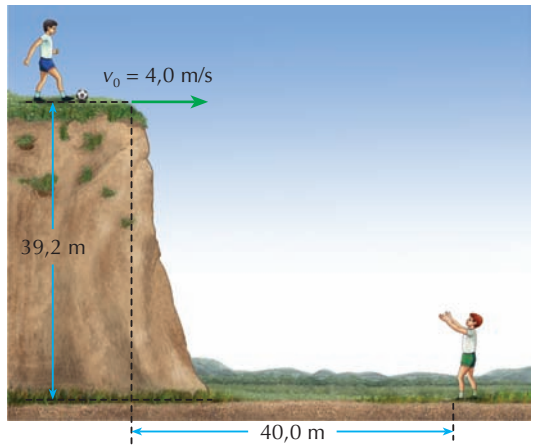
b) a distância que o pacote percorre na direção horizontal desde o lançamento até o instante em que atinge o solo;

c) o módulo da velocidade do pacote ao atingir o solo.

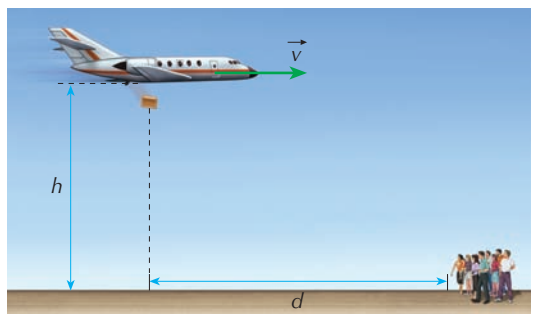


Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Atividade experimental: *Determinação da velocidade no lançamento horizontal*

P. 168 Da beira de um barranco situado a 39,2 m em relação ao nível inferior do solo, um garoto chuta uma bola, imprimindo-lhe uma velocidade horizontal de 4,0 m/s, como mostra a figura a seguir. Na parte inferior do barranco, a 40,0 m da vertical do primeiro garoto, um outro garoto vai tentar pegar a bola. Determine a que distância, à frente ou atrás do segundo garoto, a bola chutada cairá.
(Adote $g = 10\ m/s^2$ e despreze a resistência do ar).

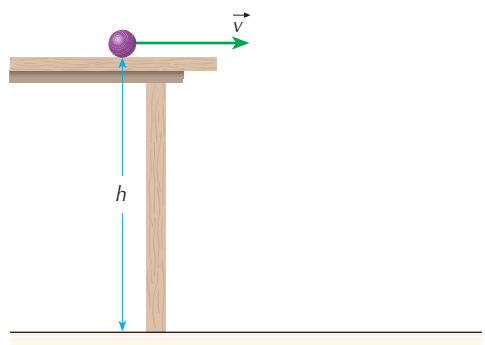


P. 169 Um avião de socorro voa horizontalmente a uma altura $h = 720$ m, a fim de lançar um pacote de mantimentos para uma população flagelada. Quando o avião se encontra à distância $d = 1.200$ m da população, na direção horizontal (veja a figura), o piloto abandona o pacote. (Adote $g = 10\ m/s^2$.)



a) Qual é a trajetória do pacote vista pelo piloto, considerando que o avião mantenha invariável o seu movimento?
b) Qual é a trajetória do pacote vista por uma pessoa da população?
c) Quanto tempo o pacote leva até chegar aos flagelados?
d) Qual é o módulo da velocidade $\vec{v}$ do avião?
e) Qual é o módulo da velocidade do pacote quando ele chega ao solo?

P. 170 Uma bolinha rola com velocidade de módulo constante $v = 5$ m/s sobre uma mesa horizontal de altura $h = 1{,}25$ m e, com essa velocidade, abandona a borda da mesa. (Adote $g = 10\ m/s^2$.)



a) Desenhe a trajetória descrita pela bolinha, em relação ao solo, após abandonar a mesa.
b) Em quanto tempo a bolinha chega ao chão?
c) O intervalo de tempo calculado no item anterior seria maior, menor ou igual, se a bolinha fosse apenas abandonada a partir da borda da mesa? Por quê?
d) Localize o ponto em que a bolinha toca o chão, calculando seu deslocamento na direção horizontal a partir do instante em que abandona a borda da mesa.
e) Calcule o módulo da velocidade com que a bolinha chega ao chão.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seção 9.2

Lançamento oblíquo no vácuo

Objetivos

- Analisar os movimentos dos corpos lançados obliquamente, decompondo-os em um movimento vertical e em um movimento horizontal.
- Estabelecer a altura máxima e o alcance nos lançamentos oblíquos.
- Representar velocidade e aceleração vetoriais em cada ponto da trajetória descrita pelo corpo.
- Calcular o módulo da velocidade vetorial em cada instante.

Termos e conceitos

- trajetória parabólica
- altura máxima
- velocidade inicial vertical
- alcance

Considere um corpo sendo lançado com velocidade $\vec{v}_0$ numa direção que forma com a horizontal um ângulo θ (ângulo de tiro). Desprezada a resistência do ar, a aceleração do corpo é a aceleração da gravidade. **A trajetória descrita, em relação à Terra, é uma parábola** (fig. 3).

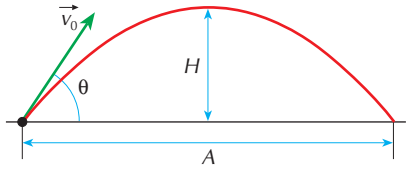


Figura 3. Lançamento oblíquo no vácuo.

A distância horizontal que o corpo percorre desde o lançamento até o instante em que retorna ao nível horizontal do lançamento é denominada **alcance** (*A*). O máximo deslocamento do móvel na direção vertical chama-se **altura máxima** (*H*) do lançamento.

O movimento descrito pelo corpo pode ser considerado o resultado da composição de dois movimentos simultâneos e independentes: um movimento vertical uniformemente variado, cuja aceleração é a da gravidade, e um movimento horizontal uniforme, pois na horizontal não há aceleração.

Vamos analisar separadamente cada um desses movimentos componentes.

1 Movimento vertical (MUV)

Consideremos o eixo *y* com origem no ponto de lançamento e orientado para cima. A aceleração escalar do movimento vertical será: $\alpha = -g$.

Se projetarmos a velocidade de lançamento $\vec{v}_0$ na direção do eixo *y*, obteremos a **velocidade inicial vertical** $\vec{v}_{0y}$, cujo módulo (**fig. 4**) é dado por:

A trajetória descrita pela bola lançada pelo atleta é parabólica.

$$v_{0y} = v_0 \cdot \operatorname{sen} \theta$$

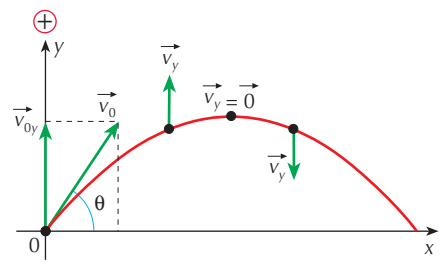


Figura 4. O módulo da velocidade vertical $\vec{v}_y$ varia como no lançamento vertical para cima.

Sob a ação da gravidade, o módulo da velocidade vertical $\vec{v}_y$ diminui à medida que o corpo sobe, anula-se no ponto mais alto e aumenta à medida que o corpo desce. Na **figura 4** representa-se a velocidade $\vec{v}_y$ em várias posições do corpo, tendo-se omitido a componente horizontal.

Como o movimento na direção vertical é uniformemente variado, valem as funções:

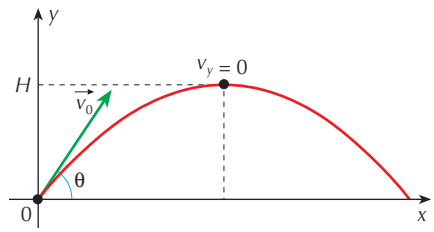
$$y = v_{0y}t + \frac{\alpha}{2}t^2 \qquad v_y = v_{0y} + \alpha t \qquad v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\alpha y$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nessas funções, como a trajetória foi orientada para cima, a aceleração escalar é $\alpha = -g$. Para calcular a altura máxima do lançamento (H), pode-se utilizar a fórmula seguinte, cuja dedução se encontra no quadro abaixo:

$$H = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta}{2g}$$

Altura máxima



No ponto mais alto da trajetória:

$$y = H \quad \text{e} \quad v_y = 0$$

Pela equação de Torricelli, temos:

$$v_y^2 = v_{0_y}^2 + 2\alpha y$$
$$0 = v_{0_y}^2 + 2(-g)H$$
$$2gH = v_{0_y}^2$$
$$H = \frac{v_{0_y}^2}{2g}$$

Mas: $v_{0_y}^2 = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta$

Logo: $H = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta}{2g}$

2 Movimento horizontal (MU)

Consideremos o eixo x com origem no ponto de lançamento e orientado no sentido da **velocidade horizontal** $\vec{v}_x$, dada pela projeção sobre esse eixo da velocidade de lançamento $\vec{v}_0$ (**fig. 5**).

O módulo da velocidade horizontal $\vec{v}_x$ é dado por:

$$v_x = v_0 \cdot \cos\,\theta$$

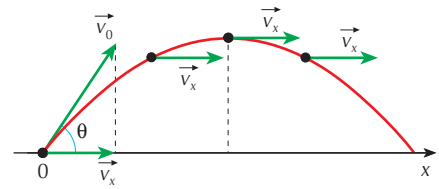


Figura 5. **A velocidade horizontal $\vec{v}_x$ permanece constante durante o movimento.**

A **figura 5**, na qual não foi representada a velocidade vertical $\vec{v}_y$, mostra que, qualquer que seja o ponto da trajetória em que o corpo esteja, a velocidade horizontal é sempre a mesma:

$$\vec{v}_x = \text{constante}$$

Assim, sendo um movimento uniforme, a função horária do movimento horizontal pode ser escrita deste modo:

$$x = v_x t$$

No quadro da página seguinte, deduzimos a fórmula que nos permite determinar o alcance (A) em função da velocidade v_0 e do ângulo de tiro θ:

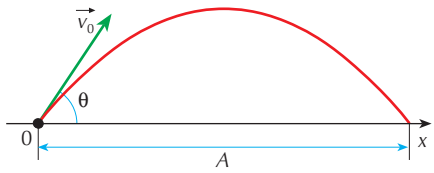
$$A = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\,2\theta}{g}$$

Por essa fórmula, verifica-se que o **alcance máximo** ($A_{máx.}$) para o lançamento, com dada velocidade v_0, é obtido quando:

$$\text{sen}\,2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Alcance do lançamento



Quando o corpo retorna ao nível de lançamento: $v_y = -v_{0y}$

Logo, sendo $\alpha = -g$, temos:

$$v_y = v_{0y} + \alpha t$$
$$-v_{0y} = v_{0y} - gt$$
$$t = \frac{2v_{0y}}{g}$$

Durante esse tempo, o corpo avança horizontalmente a distância A (alcance); assim, $x = A$.

Como $x = v_x t$, $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta$ e $v_x = v_0 \cdot \cos\theta$, vem:

$$A = v_x = \frac{2v_{0y}}{g}$$
$$A = v_0 \cdot \cos\theta \cdot \frac{2v_0 \cdot \text{sen}\,\theta}{g}$$

Como $2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = \text{sen}\,2\theta$, temos:

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\,2\theta}{g}$$

Nessa condição ($\theta = 45°$), há uma relação simples entre o alcance ($A_{máx.}$) e a altura máxima (H).

Substituindo θ por 45°, nas respectivas fórmulas, vem:

$$A_{máx.} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\,2\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\,(2 \cdot 45°)}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \overbrace{\text{sen}\,90°}^{1}}{g} \Rightarrow A_{máx.} = \frac{v_0^2}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,45°}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2g} \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{4g}$$

Comparando:

$$A_{máx.} = 4H$$

Portanto, no lançamento com $\theta = 45°$ (**fig. 6**), o alcance ($A_{máx.}$) é quatro vezes maior que a altura máxima (H) do lançamento.

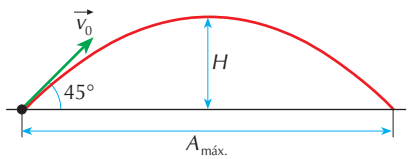


Figura 6. **Lançamento com $\theta = 45°$.**

É importante ressaltar que, considerando o movimento resultante, a velocidade $\vec{v}$ do projétil é sempre dada pela soma dos vetores componentes $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

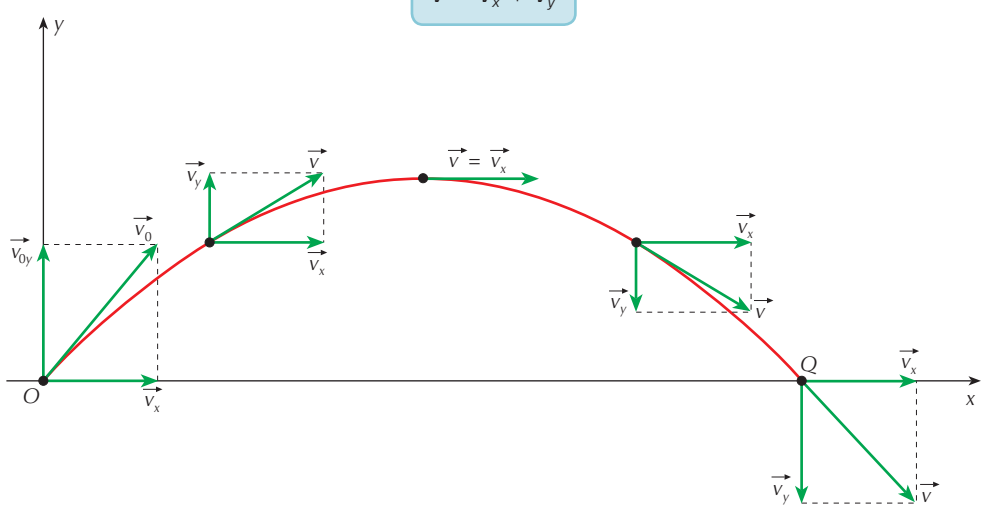


Figura 7. **Em qualquer ponto da trajetória, a velocidade resultante $\vec{v}$ é dada por $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.**

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

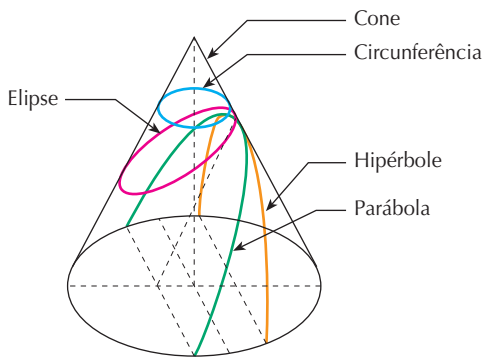
Observe, com base na **figura 7**, que a velocidade $\vec{v}$ é sempre tangente à trajetória. No ponto mais alto da trajetória, tem-se $\vec{v}_y = \vec{0}$ e, portanto, $\vec{v} = \vec{v}_x$. Sendo assim, nesse ponto, a velocidade $\vec{v}$ tem módulo mínimo.

Ao retornar ao nível horizontal de lançamento, o projétil apresenta velocidade $\vec{v}$, cujo módulo é igual ao módulo da velocidade de lançamento $\vec{v}_0$. Isso equivale a dizer que a velocidade escalar v do corpo, no instante de retorno ao solo, é igual à velocidade escalar v_0 com que foi lançado a partir do solo.

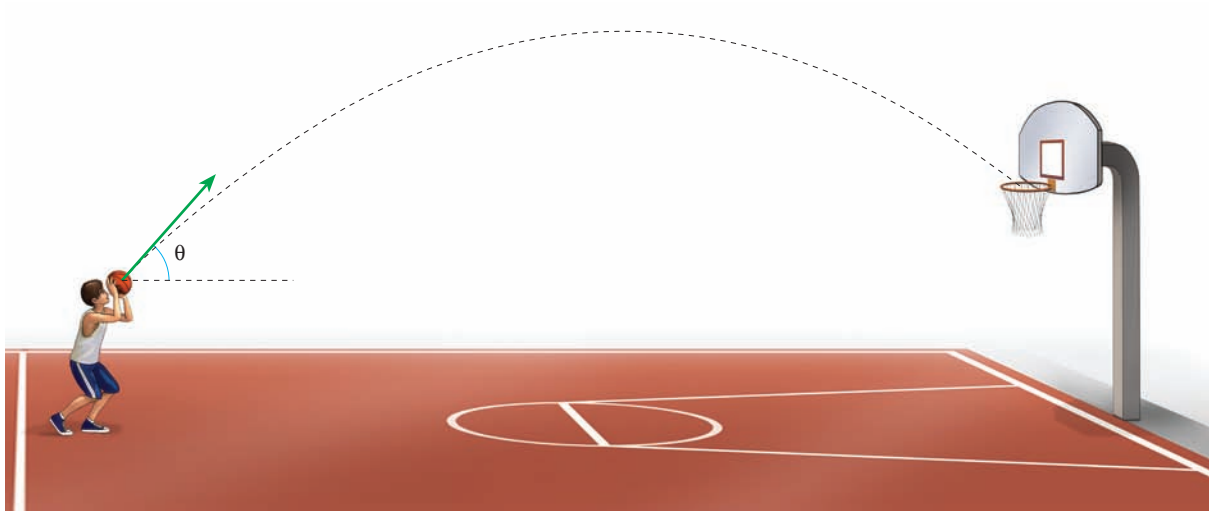
Trajetória parabólica descrita por um corpo lançado obliquamente.

A parábola

Denominam-se **cônicas** as **curvas** que podem ser obtidas a partir da secção de um cone circular reto por um plano. Dependendo da inclinação desse plano em relação à base do cone, como indica a figura ao lado, pode-se obter uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.



Etimologicamente, a palavra **parábola** provém do grego e significa **lançar ao longe**. Portanto, originalmente o termo surgiu com base num fenômeno físico e seu significado foi estendido para designar a trajetória, em relação à Terra, de um projétil lançado horizontal ou obliquamente no vácuo, nas proximidades da superfície terrestre. Somente depois é que o termo parábola assumiu o significado matemático que tem hoje.



Entre na rede No endereço eletrônico http://www.ngsir.netfirms.com/englishhtm/ThrowABall.htm (acesso em julho/2009), você pode simular o movimento de projéteis.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R. 65 Um corpo é lançado obliquamente no vácuo com velocidade inicial $v_0 = 100$ m/s, numa direção que forma com a horizontal um ângulo θ tal que sen $\theta = 0{,}8$ e cos $\theta = 0{,}6$. Adotando $g = 10$ m/s^2, determine:

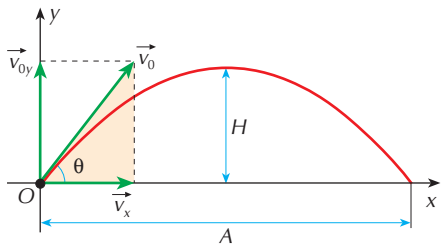
a) os módulos das componentes horizontal e vertical da velocidade no instante de lançamento;

b) o instante em que o corpo atinge o ponto mais alto da trajetória;

c) a altura máxima atingida pelo corpo;

d) o alcance do lançamento.

Solução:



a) Do triângulo retângulo destacado, formado por $\vec{v}_0$, $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_{0y}$, tiramos:

$$v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad v_x = v_0 \cdot \cos\theta$$

Como $v_0 = 100$ m/s, sen $\theta = 0{,}8$ e cos $\theta = 0{,}6$, vem:

$$v_{0y} = 100 \cdot 0{,}8 \Rightarrow \boxed{v_{0y} = 80 \text{ m/s}}$$

$$v_x = 100 \cdot 0{,}6 \Rightarrow \boxed{v_x = 60 \text{ m/s}}$$

b) No ponto mais alto da trajetória, $v_y = 0$. Como $v_y = v_{0y} + \alpha t$, com $\alpha = -g = -10$ m/s^2, vem:

$$0 = 80 - 10t \Rightarrow 10t = 80 \Rightarrow \boxed{t = 8 \text{ s}}$$

c) Substituindo $t = 8$ s em $y = v_{0y}t + \frac{\alpha}{2}t^2$ sendo $y = H$ e $\alpha = -g = -10$ m/s^2, vem:

$$H = 80 \cdot 8 - \frac{10 \cdot 64}{2} = 640 - 320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H = 320 \text{ m}}$$

d) O tempo total do movimento é $t_T = 2t = 2 \cdot 8 = 16$ s.

Para o movimento horizontal $x = v_x \cdot t$, temos: $x = A$, quando $t = 16$ s, e $v_x = 60$ m/s. Portanto:

$$A = 60 \cdot 16 \Rightarrow \boxed{A = 960 \text{ m}}$$

Respostas: a) $v_{0y} = 80$ m/s; $v_x = 60$ m/s; b) 8 s; c) 320 m; d) 960 m

Observação:
Os itens **c** e **d** podem também ser resolvidos respectivamente pelas seguintes fórmulas, deduzidas anteriormente:

$H = \dfrac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta}{2g}$, para a altura máxima, e

$A = \dfrac{v_0^2 \cdot \text{sen}\,2\theta}{g}$, para o alcance.

R. 66 Um projétil é lançado obliquamente com velocidade que forma com a horizontal um ângulo θ, atingindo a altura máxima de 7,2 m. Sabendo que no ponto mais alto da trajetória a velocidade escalar do projétil é 10 m/s, determine:

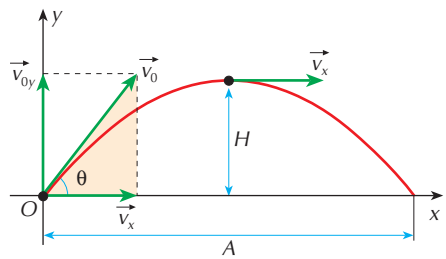
a) o intervalo de tempo para o projétil chegar ao ponto mais alto de sua trajetória (tempo de subida);

b) o tempo total do movimento;

c) a velocidade de lançamento e o ângulo de tiro θ, expresso por uma de suas funções trigonométricas;

d) o alcance horizontal do lançamento.

Solução:



a) Em $y = H = 7{,}2$ m, $v_y = 0$. Aplicando a equação de Torricelli, vem:

$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2\alpha y$ (com $\alpha = -g = -10$ m/s^2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = v_{0y}^2 - 20 \cdot 7{,}2 \Rightarrow v_{0y}^2 = 144 \Rightarrow v_{0y} = 12$ m/s

Substituindo em $v_y = v_{0y} - gt$:

$$0 = 12 - 10t_s \Rightarrow 10t_s = 12 \Rightarrow \boxed{t_s = 1{,}2 \text{ s}}$$

b) O tempo de subida é igual ao tempo de descida. Logo, o tempo total do movimento será:

$$t_T = 2t_s \Rightarrow t_T = 2 \cdot 1{,}2 \Rightarrow \boxed{t_T = 2{,}4 \text{ s}}$$

c) A velocidade de lançamento v_0 é obtida a partir de suas componentes v_x e v_{0y}, aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo destacado na figura anterior:

$v_0^2 = v_{0y}^2 + v_x^2$, sendo $v_{0y} = 12$ m/s e $v_x = 10$ m/s

Portanto: $v_0^2 = 144 + 100 \Rightarrow v_0^2 = 244 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 \simeq 15{,}6 \text{ m/s}}$$

Como $v_x = v_0 \cdot \cos\theta$, vem: $10 = 15{,}6 \cdot \cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{10}{15{,}6} \Rightarrow \boxed{\cos\theta \simeq 0{,}64}$$

Ou, ainda, $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta$. Logo: $12 = 15{,}6 \cdot \text{sen}\,\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{12}{15{,}6} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\theta \simeq 0{,}77}$$

d) Para obter o alcance $x = A$, substituímos $t_T = 2{,}4$ s em $x = v_x t$. Assim:

$$A = 10 \cdot 2{,}4 \Rightarrow \boxed{A = 24 \text{ m}}$$

Respostas: a) 1,2 s; b) 2,4 s; c) 15,6 m/s; cos $\theta \simeq 0{,}64$; sen $\theta \simeq 0{,}77$; d) 24 m

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

P. 171 Um corpo é lançado obliquamente a partir do solo, no vácuo, sob ângulo de 60° com a horizontal e com velocidade de 10 m/s. Adotando $g = 10\ m/s^2$, sen 60° = sen 120° = 0,86 e cos 60° = 0,50, determine:

a) a velocidade escalar mínima assumida pelo corpo;

b) o instante em que o corpo atinge o ponto mais alto da trajetória;

c) a altura máxima atingida pelo corpo e o alcance do lançamento.

P. 172 No lançamento oblíquo de um projétil, a altura máxima é 20 m. No ponto mais alto da trajetória, a velocidade escalar do projétil é 5 m/s. Desprezando a resistência do ar e adotando $g = 10\ m/s^2$, determine:

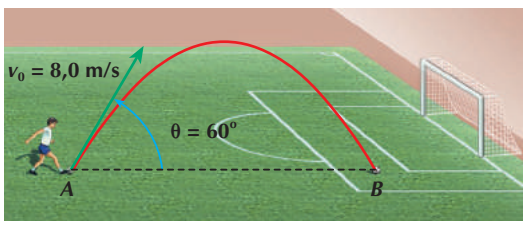
a) o tempo total do movimento e o tempo de subida;

b) a velocidade escalar de lançamento;

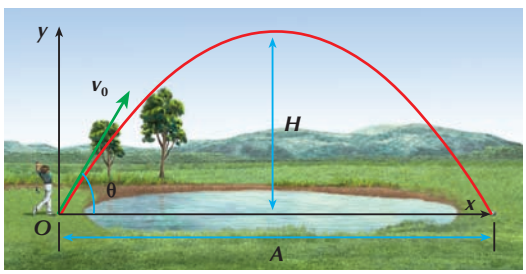
c) o ângulo de tiro expresso por uma de suas funções trigonométricas;

d) o alcance do lançamento.

P. 173 (FMIt-MG) Uma bola está parada sobre o gramado de um campo horizontal, na posição *A*. Um jogador chuta a bola para cima, imprimindo-lhe velocidade $\vec{v}_0$ de módulo 8,0 m/s, fazendo com a horizontal um ângulo de 60°, como mostra a figura. A bola sobe e desce, atingindo o solo novamente, na posição *B*. Desprezando-se a resistência do ar, qual será a distância entre as posições *A* e *B*?
(Use $g = 10\ m/s^2$, sen 60° = 0,87 e cos 60° = 0,5.)



P. 174 Um corpo é lançado de um ponto *O* do solo com velocidade inicial $\vec{v}_0$, que forma com a horizontal um ângulo θ, como indica a figura, tal que cos θ = 0,80 e sen θ = 0,60. Sendo $v_0 = 100$ m/s e $g = 10\ m/s^2$, despreze a resistência do ar e determine:



a) o instante em que o corpo atinge o ponto mais alto da trajetória;

b) o instante em que o corpo está de volta ao solo;

c) o alcance horizontal *A*;

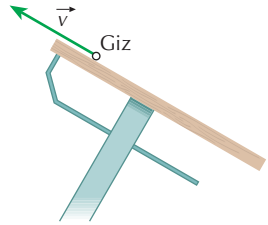
d) a altura máxima *H*;

e) a velocidade escalar do corpo no ponto de altura máxima;

f) a velocidade escalar do corpo no instante em que toca o solo.

P. 175 No exercício anterior, trace o gráfico em função do tempo das componentes horizontal e vertical da velocidade do corpo.

P. 176 (UFSCar-SP) Em plena aula, o menino decide aprontar mais uma das suas. Inclina sua mesa segundo um ângulo de 30° com a horizontal e, utilizando a ponta do dedo indicador, golpeia violentamente um pedacinho de giz sobre a carteira. Após um breve voo, o giz atinge as costas de um colega de classe, na mesma altura em que foi lançado.



Considere:

- O módulo da velocidade do giz no momento do lançamento foi 10 m/s.
- O giz praticamente não encostou no tampo da mesa no momento do lançamento.
- Aceleração da gravidade = $10\ m/s^2$.
- Desprezar a ação resistiva do ar ao movimento do giz.
- sen 30° = 0,5 e cos 30° = 0,8.

Sob estas condições, determine:

a) O valor aproximado da altura alcançada pelo giz, em m, relativa à posição de seu lançamento.

b) O tempo de voo do giz, em *s*, do momento de seu lançamento até o instante em que atinge as costas do colega de classe.

P. 177 (FMTM-MG) Em um espetacular *show* de acrobacia, uma motocicleta abandona a extremidade da rampa com velocidade de 108 km/h, sobrevoa uma fileira de fuscas estacionados, descendo finalmente em uma outra rampa idêntica e à mesma altura em que abandonou a primeira.
Considere desprezíveis ações resistivas do ar e do atrito.

Dados:
$g = 10\ m/s^2$
inclinação do plano da rampa = 32°
sen 32° = 0,53 sen 64° = 0,90
cos 32° = 0,85 cos 64° = 0,44

a) Determine quanto tempo a motocicleta permanece "voando" sobre os carros.

b) Se os fuscas foram estacionados lado a lado, ocupando uma vaga de 2,1 m de largura, determine quantos carros compunham a fileira entre as rampas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

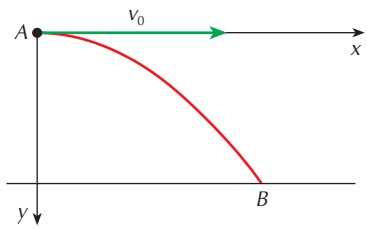
P. 178 Um corpo é lançado horizontalmente a partir de um ponto A, com velocidade de módulo 50 m/s, atingindo o solo no ponto B, conforme mostra a figura. Desprezando a resistência do ar e adotando $g = 10\ m/s^2$, determine:

a) as funções horárias dos movimentos horizontal e vertical;

b) a equação da trajetória do movimento;

c) as coordenadas (x, y) do ponto B, que foi atingido 10 s após o lançamento;

d) a velocidade resultante do corpo no ponto B.



P. 179 (Olimpíada Brasileira de Física) Dois rapazes brincam de tênis na praia. Um deles dá uma raquetada na bola a 2,45 m de altura, imprimindo-lhe uma velocidade de 72 km/h na horizontal. Qual deve ser a velocidade mínima do outro rapaz, situado inicialmente a 20,3 m à frente do primeiro, para que consiga aparar a bola antes que ela bata na areia? (Use $g = 10\ m/s^2$.)

P. 180 Um projétil é lançado obliquamente para cima com velocidade de 100 m/s numa direção que forma um ângulo de 60° com a horizontal. Desprezando a resistência do ar e adotando $g = 10\ m/s^2$, determine o módulo da velocidade vetorial do projétil 4 s após o lançamento.

$\left(\text{Dados: sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

P. 181 (Faap-SP) Um projétil lançado para cima, sob um ângulo de 60° com a horizontal, tem velocidade de 30 m/s no ponto culminante de sua trajetória. Calcule a velocidade do projétil ao retornar ao solo. (Dados: sen 60° = 0,87; cos 60° = 0,50)

P. 182 (Vunesp) Um garoto, voltando da escola, encontrou seus amigos jogando uma partida de futebol no campinho ao lado de sua casa e resolveu participar da brincadeira. Para não perder tempo, atirou sua mochila por cima do muro, para o quintal de sua casa: postou-se a uma distância de 3,6 m do muro e, pegando a mochila pelas alças, lançou-a a partir de uma altura de 0,4 m. Para que a mochila passasse para o outro lado com segurança, foi necessário que o ponto mais alto da trajetória estivesse a 2,2 m do solo. Considere que a mochila tivesse tamanho desprezível comparado à altura do muro e que durante a trajetória não houve movimento de rotação ou perda de energia. Tomando $g = 10\ m/s^2$, calcule:

a) o tempo decorrido, desde o lançamento, para a mochila atingir a altura máxima;

b) o ângulo de lançamento.

Dados:

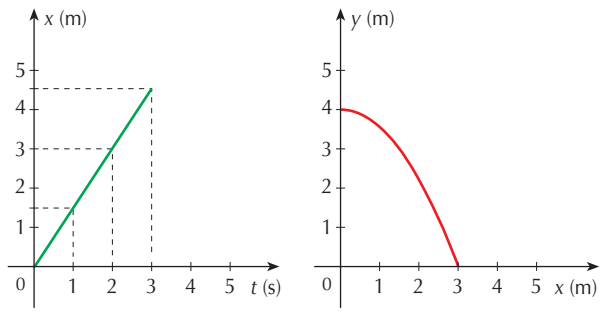
θ	sen θ	cos θ	tg θ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

P. 183 (Unicamp-SP) Um habitante do planeta Bongo atirou uma flecha e obteve os gráficos mostrados. Sendo x a distância horizontal e y a vertical:

a) qual é a velocidade horizontal da flecha?

b) qual é a velocidade vertical inicial da flecha?

c) qual é o valor da aceleração da gravidade no planeta Bongo?



P. 184 (Unicamp-SP) Até os experimentos de Galileu Galilei, pensava-se que, quando um projétil era arremessado, o seu movimento devia-se ao *impetus*, o qual mantinha o projétil em linha reta e com velocidade constante. Quando o *impetus* acabasse, o projétil cairia verticalmente até atingir o chão. Galileu demonstrou que a noção de *impetus* era equivocada. Consideremos que um canhão dispara projéteis com uma velocidade inicial de 100 m/s, fazendo um ângulo de 30° com a horizontal. Dois artilheiros calcularam a trajetória de um projétil: um deles, Simplício, utilizou a noção de *impetus*; o outro, Salviati, as ideias de Galileu. Os dois artilheiros concordavam apenas em uma coisa: o alcance do projétil. Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}8$ e $g = 10\ m/s^2$. Despreze o atrito com o ar.

$\left(\text{Dados: sen } 30° = \frac{1}{2};\ \cos 30° \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

a) Qual é o alcance do projétil?

b) Qual é a altura máxima alcançada pelo projétil, segundo os cálculos de Salviati?

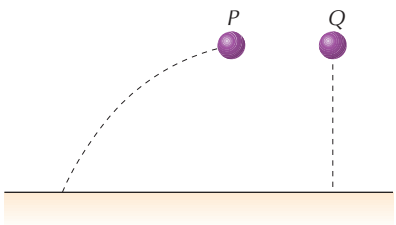
c) Qual é a altura máxima calculada por Simplício?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

TESTES PROPOSTOS

Nos testes seguintes, caso seja necessário, use os valores das funções trigonométricas dos ângulos envolvidos. A resistência do ar é sempre considerada desprezível.

T. 151 (UFMG) Um corpo *P* é lançado horizontalmente de uma determinada altura. No mesmo instante, um outro corpo Q é solto em queda livre, a partir do repouso, dessa mesma altura, como mostra a figura.



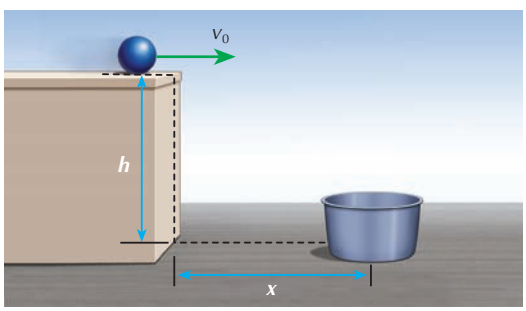
Sejam v_P e v_Q os módulos das velocidades dos corpos *P* e Q, respectivamente, imediatamente antes de tocarem o chão, e t_P e t_Q os tempos despendidos por cada corpo nesse percurso. Despreze os efeitos da resistência do ar. Nessas condições, pode-se afirmar que:

a) $v_P > v_Q$ e $t_P = t_Q$
b) $v_P > v_Q$ e $t_P > t_Q$
c) $v_P = v_Q$ e $t_P = t_Q$
d) $v_P = v_Q$ e $t_P > t_Q$

T. 152 (Cefet-PR) Dois projéteis que têm massas 0,5 kg e 1 kg são disparados do alto de um edifício, na direção horizontal, com a mesma velocidade inicial. Desconsiderando a resistência do ar, podemos afirmar que:

a) o projétil de 0,5 kg terá maior alcance horizontal.
b) o projétil de 1 kg chegará ao solo antes.
c) o projétil de 1 kg terá maior alcance horizontal.
d) os dois projéteis terão o mesmo alcance horizontal e chegarão ao solo juntos.
e) o projétil menor terá menor alcance, mas tocará o solo antes do outro.

T. 153 (PUC-MG) A figura desta questão mostra uma esfera lançada com velocidade horizontal de 5,0 m/s de uma plataforma de altura 1,8 m.
(Use $g = 10\ m/s^2$.)



Ela deve cair dentro do pequeno frasco colocado a uma distância *x* do pé da plataforma. A distância *x* deve ser de, aproximadamente:

a) 1,0 m
b) 2,0 m
c) 2,5 m
d) 3,0 m
e) 3,5 m

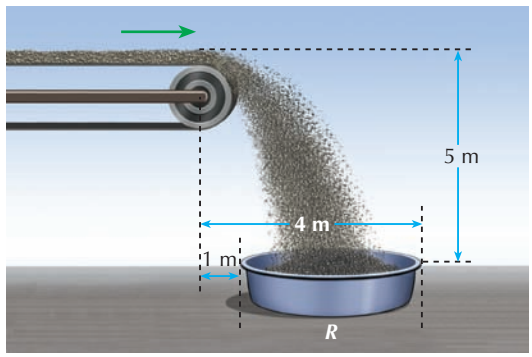
T. 154 (UFMG) Uma pessoa observa o movimento parabólico de uma pedra lançada horizontalmente com velocidade v_0. A pessoa poderia ver a pedra cair verticalmente se se deslocasse:

a) com velocidade $v' = 2v_0$, paralela a v_0 e no mesmo sentido.
b) com velocidade $v' = v_0$, paralela a v_0 e no sentido oposto.
c) com velocidade $v' = v_0$, paralela a v_0 e no mesmo sentido.
d) com velocidade $v' = 2v_0$, paralela a v_0 e no sentido oposto.
e) com velocidade $v' = v_0$, em qualquer direção e em qualquer sentido.

T. 155 (UFG-GO) Uma esfera rola sobre uma mesa horizontal, abandona essa mesa com uma velocidade horizontal v_0 e toca o solo após 1 s. Sabendo que a distância horizontal percorrida pela bola é igual à altura da mesa, a velocidade v_0, considerando $g = 10\ m/s^2$, é de:

a) 1,25 m/s
b) 10,00 m/s
c) 20,00 m/s
d) 5,00 m/s
e) 2,50 m/s

O enunciado a seguir refere-se aos testes **T.156** e **T.157**.
(PUC-SP) O esquema apresenta uma correia que transporta minério, lançando-o no recipiente *R*. A velocidade da correia é constante e a aceleração local da gravidade é $10\ m/s^2$.



T. 156 Para que todo o minério caia dentro do recipiente, a velocidade *v* da correia, dada em m/s, deve satisfazer a desigualdade:

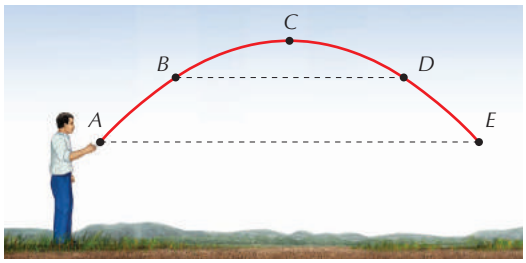
a) $2 < v < 3$
b) $2 < v < 5$
c) $1 < v < 3$
d) $1 < v < 4$
e) $1 < v < 5$

T. 157 Se for aumentado o desnível entre a correia transportadora e o recipiente *R*, o intervalo de variação das velocidades-limite para que todo o minério caia em *R*:

a) permanece o mesmo, assim como os valores das velocidades-limite.
b) permanece o mesmo, mas os valores das velocidades-limite aumentam.
c) permanece o mesmo, mas os valores das velocidades-limite diminuem.
d) aumenta.
e) diminui.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

T. 158 (Mackenzie-SP) Arremessa-se obliquamente uma pedra, como mostra a figura.



Nessas condições, podemos afirmar que:

a) a componente horizontal da velocidade da pedra é maior em *A* do que nos pontos *B*, *C*, *D* e *E*.

b) a velocidade da pedra no ponto *A* é a mesma que nos pontos *B*, *C* e *D*.

c) a componente horizontal da velocidade tem o mesmo valor nos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*.

d) a componente vertical da velocidade é nula no ponto *E*.

e) a componente vertical da velocidade é máxima no ponto *C*.

T. 159 (FEI-SP) Um projétil é lançado com velocidade $\vec{v}_0$, formando um ângulo θ com um plano horizontal, em uma região onde a aceleração da gravidade é g. O projétil atinge a altura h e retorna ao plano horizontal de lançamento, à distância d do ponto em que foi lançado. Pode-se afirmar que:

a) o alcance d será tanto maior quanto maior for θ.

b) no ponto de altura h, a velocidade e a aceleração do projétil são nulas.

c) no ponto de altura h, a velocidade do projétil é nula, mas a sua aceleração não o é.

d) no ponto de altura h, a aceleração do projétil é nula, mas a sua velocidade não o é.

e) nenhuma das afirmativas anteriores é correta.

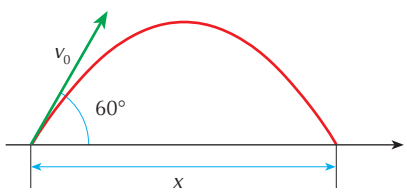
T. 160 (UEL-PR) Um corpo é lançado para cima, com velocidade inicial de 50 m/s, numa direção que forma um ângulo de 60° com a horizontal (dados: sen 60° = 0,87; cos 60° = 0,50; $g = 10\ m/s^2$). Desprezando a resistência do ar, pode-se afirmar que no ponto mais alto da trajetória a velocidade do corpo, em m/s, será:

a) 5 **c)** 25 **e)** 50

b) 10 **d)** 40

O enunciado a seguir refere-se aos testes **T. 161** e **T. 162.**

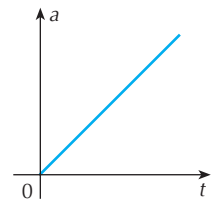
(FMIt-MG) Uma pedra é lançada para cima, fazendo ângulo de 60° com a horizontal e com uma velocidade inicial de 20 m/s, conforme a figura abaixo. (Use $g = 10\ m/s^2$.)



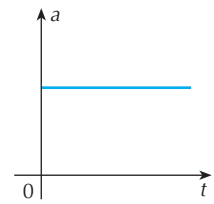
$\left(\text{Dados: } \cos 60° = 0{,}50;\ \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

T. 161 Qual é o gráfico que melhor representa a variação do módulo de sua aceleração vetorial com o tempo enquanto ela permanece no ar? Despreze a resistência do ar.

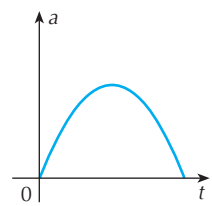
a)



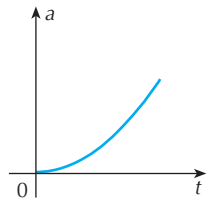
b)



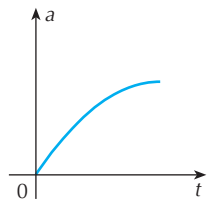
c)



d)



e)



T. 162 A que distância x do ponto de lançamento, na horizontal, a pedra tocou o solo?

a) 35 m **c)** 17,3 m **e)** n.d.a.

b) 40 m **d)** 17 m

T. 163 (Uece) Num lugar em que $g = 10\ m/s^2$, lançamos um projétil com a velocidade inicial de 100 m/s, formando com a horizontal um ângulo de elevação de 30°. A altura máxima será atingida após:

a) 3 s **c)** 5 s

b) 4 s **d)** 10 s

$\left(\text{Dados: sen } 30° = 0{,}50;\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

T. 164 (Fatec-SP) A velocidade do lançamento oblíquo de um projétil vale o dobro de sua velocidade no ponto de altura máxima. Considere constante a aceleração gravitacional e despreze a resistência do ar.

O ângulo de lançamento θ é tal que:

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ **c)** $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$ **e)** $\operatorname{cotg}\theta = 2$

b) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ **d)** $\operatorname{tg}\theta = 2$

T. 165 (Uerj) Um projétil é lançado segundo um ângulo de 30° com a horizontal e com uma velocidade de 200 m/s. Supondo a aceleração da gravidade igual a $10\ m/s^2$ e desprezando a resistência do ar, concluímos que o menor tempo gasto por ele para atingir a altura de 480 m acima do ponto de lançamento será de:

a) 8 s **c)** 9 s **e)** 12 s

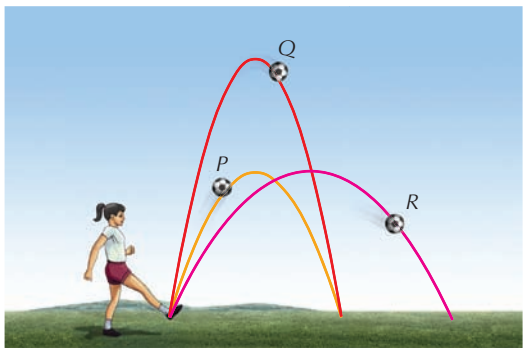
b) 10 s **d)** 14 s

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

T. 166 (Mackenzie-SP) Seja T o tempo total de voo de um projétil disparado a 60° com a horizontal, e seja $v_{0y} = 200$ m/s o valor da componente vertical da velocidade inicial. Desprezando a resistência do ar e considerando a aceleração da gravidade $g = 10\,m/s^2$, os valores da componente vertical da velocidade nos instantes $t = T$ e $t = \frac{T}{2}$ são, respectivamente:

a) zero; zero
b) zero; 200 m/s
c) 200 m/s; zero
d) 200 m/s; 200 m/s
e) 200 m/s; 100 m/s

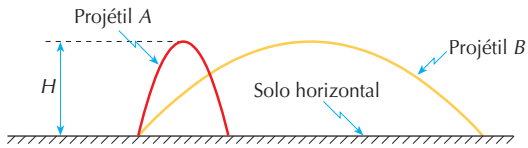
T. 167 (UFMG) Clarissa chuta, em sequência, três bolas (P, Q e R), cujas trajetórias estão representadas nesta figura:



Sejam t_P, t_Q e t_R os tempos gastos, respectivamente, pelas bolas P, Q e R, desde o momento do chute até o instante em que atingem o solo. Considerando-se essas informações, é correto afirmar que:

a) $t_Q > t_P = t_R$
b) $t_R > t_Q = t_P$
c) $t_Q > t_R > t_P$
d) $t_R > t_Q > t_P$

T. 168 (Unip-SP) Em uma região onde o efeito do ar é desprezível e o campo de gravidade é uniforme, dois projéteis, A e B, são lançados a partir de uma mesma posição de um plano horizontal. O intervalo de tempo decorrido desde o lançamento até o retorno ao solo horizontal é chamado de tempo de voo.



Sabendo que os projéteis A e B atingem a mesma altura máxima H e foram lançados no mesmo instante, podemos concluir que:

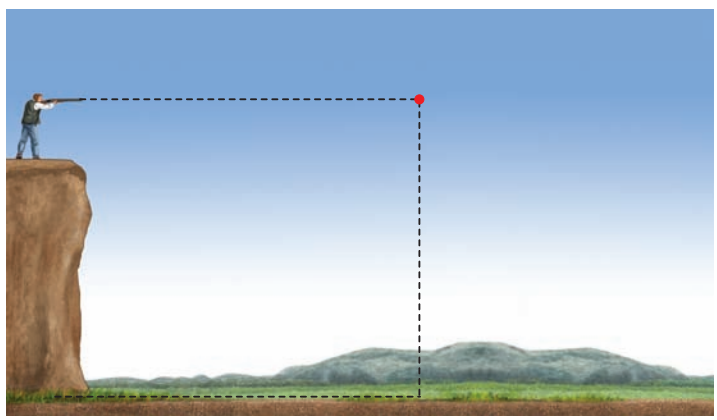
a) os projéteis foram lançados com velocidades de mesma intensidade.
b) as velocidades dos projéteis no ponto mais alto da trajetória são iguais.
c) os ângulos de tiro (ângulo entre a velocidade de lançamento e o plano horizontal) são complementares.
d) a cada instante os projéteis A e B estavam na mesma altura e o tempo de voo é o mesmo para os dois.
e) durante o voo os projéteis têm acelerações diferentes.

EXERCÍCIOS ESPECIAIS *de lançamento horizontal e oblíquo*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R. 67 Um homem com um rifle faz pontaria num objeto situado a 500 m e a uma altura de 100 m do solo, como mostra a figura. No instante em que o projétil sai do cano da arma, o objeto inicia um movimento de queda. Despreze a resistência do ar e adote $g = 10\,m/s^2$. Sendo 200 m/s a velocidade inicial do projétil, determine:

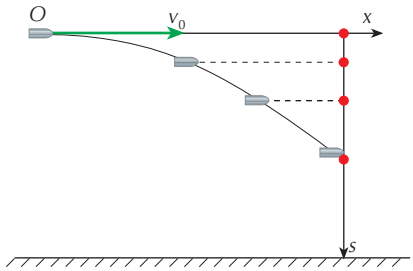
a) o instante em que o projétil atinge o objeto;
b) a altura do objeto em relação ao solo no instante em que é atingido.



Solução:

a) Observe que, se o objeto não caísse, mantendo-se na sua posição inicial, ele não seria atingido pelo projétil. Isso porque, à medida que avança horizontalmente, o projétil vai caindo sob a ação da gravidade. Desse modo, ele passaria sob o objeto, que não teria se movido.

Neste caso, objeto e projétil caem simultaneamente com movimentos verticais idênticos e se encontram na vertical de queda do objeto, como é mostrado no esquema.



Para calcular o instante de encontro, basta considerar o movimento horizontal do projétil, que é admitido uniforme:

$$x = v_0 t \quad (\text{com } x = 500 \text{ m e } v_0 = 200 \text{ m/s}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 500 = 200t \Rightarrow \boxed{t = 2{,}5 \text{ s}}$$

b) A posição de encontro em relação ao ponto de partida do objeto pode ser obtida substituindo-se esse valor de t na função horária do movimento de queda:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \quad (\text{com } s_0 = 0;\ v_0 = 0;\ \alpha = +g = 10 \text{ m/s}^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s = 5t^2 \Rightarrow s = 5 \cdot (2{,}5)^2 \Rightarrow s = 31{,}25 \text{ m}$$

No entanto, pergunta-se a altura em relação ao solo em que ocorreu o encontro. Então, sendo $h_0 = 100$ m a altura inicial do projétil, temos:

$$h = h_0 - s \Rightarrow h = 100 - 31{,}25 \Rightarrow \boxed{h = 68{,}75 \text{ m}}$$

Respostas: a) 2,5 s; b) 68,75 m

R. 68 Uma bola é lançada com velocidade 20 m/s numa direção que faz um ângulo de 60° com a horizontal. A bola, em sua trajetória, choca-se contra um muro vertical, situado a 30 m do ponto de lançamento.
Desprezando a resistência do ar, determine:

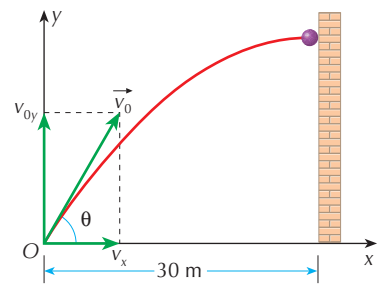
a) o instante em que a bola atinge o muro;

b) a altura do ponto do muro atingido pela bola.

(Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; sen 60° = 0,87; cos 60° = 0,5)

Solução:

De acordo com o esquema ao lado, que representa o ocorrido, temos:



$$\alpha = -g = -10 \text{ m/s}^2$$
$$y_0 = 0 \text{ e } x_0 = 0$$
$$v_0 = 20 \text{ m/s e } \theta = 60°$$

As componentes horizontal e vertical da velocidade inicial valem:

$$v_x = v_0 \cdot \cos 60° = 20 \cdot 0{,}5 \Rightarrow v_x = 10 \text{ m/s}$$
$$v_{0_y} = v_0 \cdot \text{sen } 60° = 20 \cdot 0{,}87 \Rightarrow v_{0_y} = 17{,}4 \text{ m/s}$$

a) O impacto com o muro ocorre após a bola ter percorrido $x = 30$ m na direção horizontal. Como o movimento horizontal é uniforme:

$$x = x_0 + v_x t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 10t \Rightarrow 30 = 10t \Rightarrow \boxed{t = 3 \text{ s}}$$

b) A posição do ponto de impacto na direção vertical (altura) pode ser obtida substituindo-se o valor de t na função horária do movimento na direção vertical (MUV):

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{\alpha}{2} t^2 \Rightarrow y = 17{,}4t - 5t^2$$

Para $t = 3$ s, temos:

$$y = 17{,}4 \cdot 3 - 5 \cdot (3)^2 \Rightarrow \boxed{y = 7{,}2 \text{ m}}$$

Respostas: a) 3 s; b) 7,2 m

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

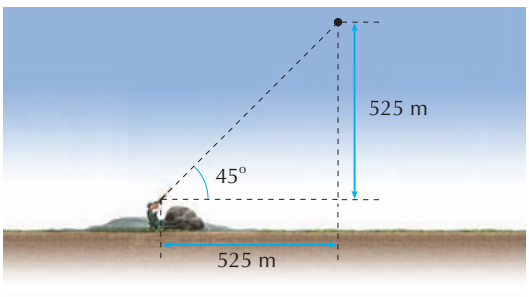
P. 185 Num exercício de tiro, um homem sobre uma plataforma aponta sua arma na direção de um objeto parado no ar e situado na mesma horizontal, a 200 m de distância, como mostra o esquema. No instante em que a arma é disparada, o objeto, que inicialmente se encontrava a 80 m do solo, inicia seu movimento de queda. Desprezando a resistência do ar e adotando $g = 10\ m/s^2$, determine a velocidade mínima que deve ter a bala para atingir o objeto.

P. 186 Um atirador aponta sua espingarda para um objeto parado no ar a uma altura de 525 m, como indica a figura. Despreze a resistência do ar e considere a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$. Admitindo que, no momento em que a bala sai da arma com velocidade 200 m/s, o objeto inicia seu movimento de queda, determine:

a) o instante em que a bala atinge o objeto;

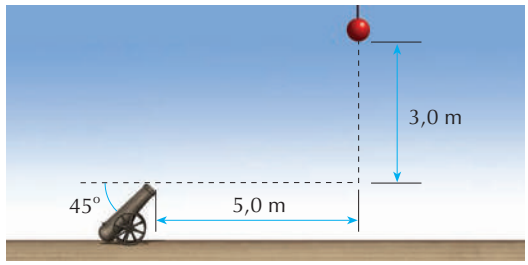
b) a altura, relativamente ao solo, em que a bala atinge o objeto.

(Dados: sen 45° = cos 45° = 0,7)



P. 187 Num parque de diversões um dos brinquedos consiste em usar um canhão fixo, inclinado, fazendo um ângulo igual a 45° com o solo, para atingir uma pequena bola suspensa a 3,0 m de altura da boca do canhão e a uma distância horizontal de 5,0 m do canhão. Determine a velocidade inicial que deve ser imprimida ao projétil para se conseguir acertar o alvo.

$\left(\text{Dados: } g = 10\ m/s^2; \text{ sen } 45° = \cos = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



P. 188 (PUC-SP) Um garoto parado num plano horizontal, a 3 m de uma parede, chuta uma bola, comunicando-lhe velocidade de 10 m/s, de tal modo que sua direção forma, com a horizontal, um ângulo de 45° (dados: sen 45° = cos 45° = 0,7). A aceleração da gravidade no local é $10\ m/s^2$ e a resistência do ar pode ser desprezada. Determine:

a) o instante em que a bola atinge a parede;

b) a altura do ponto da parede atingido pela bola;

c) a velocidade da bola no instante do impacto.

P. 189 (EEM-SP) Em um jogo de futebol, houve a cobrança de uma falta a 30 m do gol, com a barreira posicionada a 9,6 m da bola. A bola passa sobre a barreira, a 2,3 m de altura. Nesse instante, o vetor velocidade da bola forma um ângulo de 30° com a horizontal. A altura máxima atingida pela bola é 4,8 m. Desprezando efeitos viscosos, determine:

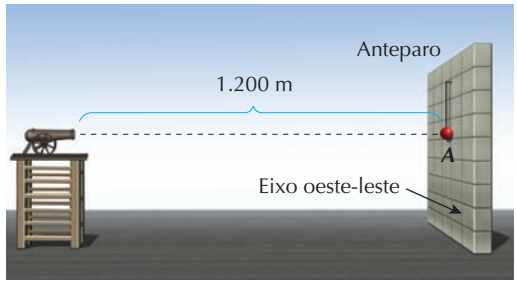
a) a componente vertical da velocidade da bola ao chegar ao gol, também a 2,3 m de altura;

b) o tempo que o goleiro tem para tentar a defesa, após o instante em que a bola passa sobre a barreira, admitindo que ele esteja sobre a linha do gol. (Use $g = 9,8\ m/s^2$.)

TESTES PROPOSTOS

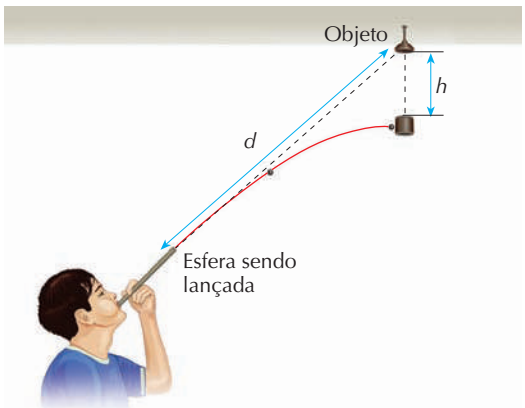
T. 169 (Aman-RJ) A figura ao lado mostra um canhão sobre uma plataforma. A 1.200 m a norte dele, há um anteparo onde deverá ser colocado um alvo. O canhão, apontando para o ponto A, realiza um disparo de um projétil, que sai com velocidade inicial de 600 m/s. Sabendo-se que o ponto A, indicado na figura, está na mesma horizontal que a boca do canhão e que, no local, sopra um vento lateral constante, de oeste para leste, com velocidade de 15 m/s, assinale a alternativa que contém a distância do ponto de impacto, no anteparo, até o alvo A. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$.

a) $10\sqrt{13}$ **b)** 30 m **c)** $5\sqrt{10}$ m **d)** $\sqrt{120}$ m **e)** 50 m



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

T. 170 (UFRN) A experiência ilustrada na figura a seguir é realizada na superfície da Terra. Nessa experiência, uma pessoa lança uma pequena esfera no mesmo instante em que um objeto que estava preso no teto é liberado e cai livremente. A esfera, lançada com velocidade v_0, atinge o objeto após um tempo t_g. Se repetirmos, agora, essa mesma experiência num ambiente hipotético, onde a aceleração local da gravidade é nula, o tempo de colisão entre a esfera e o objeto será t_0.



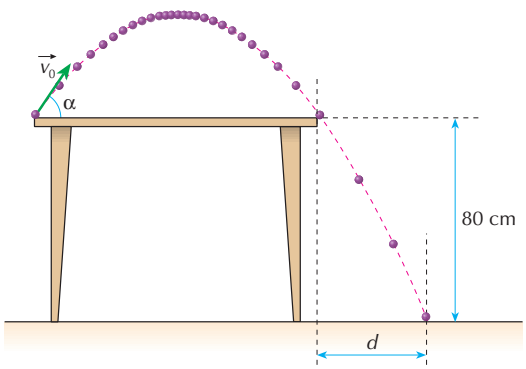
A ilustração do movimento de uma esfera lançada por um instrumento rudimentar (zarabatana).

Considerando desprezível a resistência do ar nessas experiências, pode-se afirmar que:

a) $t_0 = t_g = \frac{d}{v_0}$ **c)** $t_0 > t_g = \frac{d}{v_0}$

b) $t_0 = t_g = \frac{h}{v_0}$ **d)** $t_0 > t_g = \frac{h}{v_0}$

T. 171 (Mackenzie-SP) Da aresta superior do tampo retangular de uma mesa de 80 cm de altura, um pequeno corpo é disparado obliquamente, com velocidade inicial de módulo 5,00 m/s, conforme mostra a figura abaixo. O tampo da mesa é paralelo ao solo e o plano da trajetória descrita, perpendicular a ele.

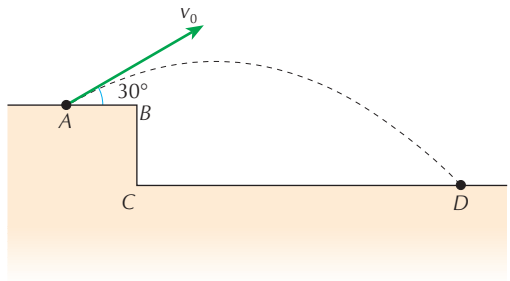


(Despreze a resistência do ar e considere: sen α = 0,60; cos α = 0,80; $g = 10\ m/s^2$)
Sabendo que o corpo tangencia a aresta oposta, podemos afirmar que a distância d é de:

a) 0,60 m **c)** 1,20 m **e)** 3,20 m

b) 0,80 m **d)** 1,60 m

O enunciado a seguir refere-se aos testes **T.172** e **T.173**.
(UFPA) A figura representa um projétil, que é lançado do ponto A segundo um ângulo de 30° com a horizontal, com uma velocidade $v_0 = 100$ m/s, atingindo o ponto D.
Dados:
$AB = 40$ m; $BC = 55$ m; $g = 10\ m/s^2$;
sen 30° = 0,50; cos 30° = 0,866



T. 172 O tempo que o projétil levou para atingir o ponto D, em segundos, vale:

a) 5,3 **c)** 11 **e)** 16,2

b) 7,8 **d)** 12,6

T. 173 A distância CD, em metros, vale:

a) 418,98 **c)** 692,86 **e)** 1.051,16

b) 458,98 **d)** 912,60

T. 174 (Olimpíada Brasileira de Física) Um projétil é lançado por um canhão localizado sobre um trem que está com velocidade horizontal constante v_0 em relação ao solo. Para um passageiro do trem, o canhão aponta para a frente formando um ângulo θ com a horizontal, e o projétil é lançado com velocidade de módulo igual a v_1. Para esse passageiro a altura máxima, atingida pelo projétil, em relação ao solo, é h. Para um observador localizado no solo, qual será o ângulo de lançamento do projétil e a altura máxima, em relação ao solo, alcançada pelo projétil?

a) O mesmo ângulo de lançamento e a mesma altura.

b) O mesmo ângulo e altura diferente.

c) Um ângulo menor e a mesma altura.

d) Um ângulo maior e a mesma altura.

e) Um ângulo diferente e altura diferente.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.